Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

10. November 2012

Zwischenklausur Analysis I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •
• • • **Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge** • • •
• • • **bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst** • • •
• • • **auf das, womit sie schnell Punkte holen können!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Für drei Mengen A, B, C gilt: Ist $A \subseteq B$ und $A \subseteq C$, so ist $A \subseteq B \cap C$.

Lösung: *Richtig:* Jedes Element $a \in A$ liegt sowohl in B als auch in C, also in $B \cap C$.

2) Richtig oder falsch: Für eine komplexe Zahl $z \neq 0$ ist die Differenz $z - \overline{z}$ zur konjugiert komplexen Zahl $\overline{z}$ reell.

Lösung: *Falsch:* Für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ist $z - \overline{z} = 2iy$, was für $y \neq 0$ nicht reell ist.
NB: Es reicht nicht zu sagen, $2iy$ sei komplex: Da jede reelle Zahl insbesondere komplex ist, kann man aus der Aussage „w ist komplex“ selbstverständlich nicht schließen, daß w keine reelle Zahl sein kann.

3) Richtig oder falsch: Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ ist $|x| + |y| - |z| \leq |x + y - z| \leq |x| + |y| + |z|$.

Lösung: *Falsch,* denn zwar ist nach der Dreiecksungleichung

$$|x + y - z| \leq |x + y| + |z| \leq |x| + |y| + |z| \ ,$$

aber die untere Schranke ist falsch: Für $x = 3$, $y = -2$ und $z = 1$ etwa ist $|x| + |y| - |z| = 4$ größer als $|x + y - z| = 0$.
Alternative Lösung: Für $z = 0$ wird die Behauptung zu $|x| + |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$; zumindest für $x = -y \neq 0$ ist dies offensichtlich falsch. (Es gibt noch zahlreiche andere Gegenbeispiele.)

4) Richtig oder falsch: Die Differenz zweier monoton wachsender Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist auch monoton wachsend.

Lösung: *Falsch:* Die Folgen mit $x_n = n$ und $y_n = 2n$ sind beide monoton wachsend, aber ihre Differenzen $x_n - y_n = -n$ bilden eine monoton fallende Folge.
NB: Vielfach wurde diesess Gegenbeispiel in der Form $x_n = x$ und $y_n = 2x$ präsentiert; das ist natürlich Unsinn: Ein Folgenglied x_n oder y_n muß definiert werden als ein Ausdruck in n; wir haben hier gar keine Variable x, mit der wir rechnen könnten. Richtig, aber keine Antwort auf diese Frage, wäre die Aussage: Die Differenz zweier monoton wachsender *Funktionen* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muß nicht monoton wachsend sein; die Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = 2x$ bilden ein Gegenbeispiel, denn $f(x) - g(x) = -x$ ist eine monoton fallende Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

5) Richtig oder falsch: $\sqrt{8} \in \mathbb{Q}$

Lösung: *Falsch:* Da $\mathbb{Q}$ ein Körper ist und $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, läge mit $\sqrt{8}$ auch das Produkt $\frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{2}$ in $\mathbb{Q}$, was bekanntlich nicht der Fall ist.

NB: Auch wenn es viel mehr Arbeit macht, kann man natürlich hier auch versuchen, den aus der Vorlesung bekannten Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ zu modifizieren. Das geht aber nicht, wie vielfach angenommen, fast wörtlich: Wenn wir annehmen, $\sqrt{8} = p/q$ sei als ein gekürzter Bruch darstellbar, ist $8 = p^2/q^2$, also $q^2 = 8p^2$. Damit muß q^2 durch acht teilbar sein. Daraus folgt nun aber *nicht,* daß auch q selbst durch acht teilbar sein muß: Schließlich ist etwa $4^2 = 16$ durch acht teilbar, vier aber nicht. Klar ist nur, daß q eine Viererzahl sein muß, denn wenn in der Primzerlegung von q^2 mindestens drei Faktoren zwei vorkommen, müssen in der von q mindestens zwei stecken. Daher gibt es ein r mit $q = 4r$ und $q^2 = 16r^2 = 8p^2$, d.h. $p^2 = 2r^2$. Damit ist p^2 gerade, also auch p, im Widerspruch zur angenommenen Gekürztheit des Bruchs p/q. Somit kann $\sqrt{8}$ nicht rational sein.

6) Richtig oder falsch: Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, so ist das Bild eines jeden offenen Intervalls unter f wieder ein offenes Intervall.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise ist das Bild des offenen Intervalls $(-1, 1)$ unter der stetigen Abbildung $f(x) = x^2$ das halboffene Intervall $[0, 1)$, also kein offenes Intervall. Auch die von vielen als Gegenbeispiel angeführten konstanten Abbildungen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = c$ für alle x für ein festes $c \in \mathbb{R}$ zeigen dies, denn f bildet jedes offene Intervall (a, b) ab auf die Menge $\{c\}$, die natürlich kein offenes Intervall ist.

7) Richtig oder falsch: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ konvergiert.

Lösung: *Richtig,* denn dies eine alternierende Reihe und die Zahlen $1/\sqrt{k}$ bilden eine monoton fallende Nullfolge, so daß uns das LEIBNIZ-Kriterium die Konvergenz garantiert.

8) Richtig oder falsch: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2}$ konvergiert.

Lösung: *Richtig,* denn wegen der Monotonie der Exponentialfunktion ist $e^{-k^2} < e^{-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-1}\right)^k = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}}$$

nach der Summenformel für die geometrische Reihe. Somit gibt es eine konvergente Majorante, die Summe konvergiert also.

Alternative Lösung: Wir wissen, daß $e^x \geq 1 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$; daher ist insbesondere $e^{k^2} \geq 1 + k^2 > k^2$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also $e^{-k^2} < 1/k^2$. Wie wir in der Vorlesung gesehen haben, konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, also ist sie eine konvergente Majorante der betrachteten Summe, die damit auch konvergieren muß.

Aufgabe 1: (*5 Punkte*)

Stellen Sie die Zahlen

a) $\dfrac{10-\sqrt{11}}{10+\sqrt{11}}$ und *b)* $(1+i)^{2012}$ möglichst einfach dar, und geben Sie bei *b)* an, wie viele Dezimalstellen der Betrag des Ergebnisses hat! (Hinweis: $\log_{10} 2 \approx 0{,}30103$)

Lösung: Bei *a)* erweitern wir so, daß wir im Nenner die dritte binomische Formel anwenden können, also mit $10-\sqrt{11}$:

$$\frac{10-\sqrt{11}}{10+\sqrt{11}} = \frac{(10-\sqrt{11})^2}{100-11} = \frac{100-20\sqrt{11}+11}{89} = \frac{111}{89} - \frac{20}{89}\sqrt{11}\,.$$

Für *b)* berechnen wir zunächst $(1+i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 2i$. Damit ist

$$(1+i)^{2012} = (2i)^{1006} = 2^{1006} \cdot i^{1006}\,.$$

Da 1000 durch vier teilbar ist, ist $i^{1000} = i^{1004} = 1$ und $i^{1006} = i^2 = -1$; also ist $(1+i)^{2012} = -2^{1006}$.

Der Betrag dieser Zahl ist 2^{1006} mit dekadischem Logarithmus $\log_{10} 2^{1006} = 1006 \cdot \log_{10} 2 \approx 302,836$; der Betrag hat also 303 Dezimalstellen.

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)

a) Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl n ist $\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3$!

Lösung:

a) kann beispielsweise durch vollständige Induktion bewiesen werden: Für den Induktionsanfang muß gezeigt werden, daß $1^2 = 1^3$ ist; das ist offensichtlich der Fall.

Wir setzen

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

und nehmen an, die Behauptung sei für ein festes $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 &= \big(S_n + (n+1)\big)^2 = S_n^2 + 2S_n(n+1) + (n+1)^2 \\ &= S_n^2 + n(n+1)^2 + (n+1)^2 = S_n^2 + (n+1)(n+1)^2 = S_n^2 + (n+1)^3 \\ &\underset{\text{IA}}{=} \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3\,,\end{aligned}$$

so daß die Behauptung auch für $n+1$ gilt. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die behauptete Formel somit für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Was ist $\sum_{k=1}^{100} k^3$?

Hinweis: Wir wissen aus der Vorlesung, daß die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gleich $\frac{1}{2}n(n+1)$ ist. Im übrigen kann hier, wie so oft in der Mathematik, geschicktes Ausklammern und Zusammenfassen viel Rechnung ersparen.

Lösung: Für $n = 100$ ist $S_n = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101 = 5050$, und die gesuchte Summe ist nach *a)* das Quadrat davon, also

$$\sum_{k=1}^{100} k^3 = 5050^2 = 25\,502\,500\,.$$

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*
$f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ sei eine streng monoton wachsende stetige Funktion. Konstruieren Sie eine Intervallschachtelung $\big([a_n, b_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ für einen Punkt $x \in [a, b]$ mit $f(x) = \frac{1}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$!

Lösung: Wir setzen $y = \frac{1}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$, $a_1 = a$ und $b_1 = b$. Dann $f(a_1) < y < f(a_2)$; nach dem Zwischenwertsatz gibt es also ein $x \in [a_1, b_1]$ mit $f(x) = y$. Wir konstruieren rekursiv weitere Intervalle $[a_n, b_n]$ mit $f(a_n) < y < f(b_n)$ wie folgt: Ist $[a_n, b_n]$ gegeben, so betrachten wir die Intervallmitte $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$. Falls $y \le f(c_n)$ ist, setzen wir $a_{n+1} = a_n$ und $b_{n+1} <= c_n$, andernfalls setzen wir $a_{n+1} = c_n$ und $b_{n+1} = b_n$. In jedem der beiden Fälle ist $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ und $f(a_{n+1}) \le y \le f(b_{n+1})$, d.h. es gibt ein $x \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$ mit $f(x) = y$. Da jedes Intervall die halbe Länge seines Vorgängers hat, bilden die Intervallängen eine Nullfolge, wir haben also eine Intervallschachtelung für die gesuchte Zahl x.

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

a) Finden Sie den Fehler im folgenden „Beweis“:
Für eine reelle Zahl x ist $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, also $(x+1)^2 - 2x - 1 = x^2$. Subtraktion von $x(2x+1)$ auf beiden Seiten macht daraus $(x+1)^2 - (x+1)(2x+1) = x^2 - x(2x+1)$. Addieren wir noch auf beiden Seiten das Quadrat von $\frac{1}{2}(2x+1)$, erhalten wir

$$(x+1)^2 - 2(x+1)\cdot\frac{2x+1}{2} + \left(\frac{2x+1}{2}\right)^2 = x^2 - 2x\cdot\frac{2x+1}{2} + \left(\frac{2x+1}{2}\right)^2$$

oder $\left((x+1) - \dfrac{2x+1}{2}\right)^2 = \left(x - \dfrac{2x+1}{2}\right)^2$, d.h. $(x+1) - \frac{1}{2}(2x+1) = x - \frac{1}{2}(2x+1)$ und damit $x + 1 = x$.

Lösung: Wenn $a^2 = b^2$ ist, muß nicht $a = b$ sein. In der Tat ist hier $x+1-\frac{1}{2}(2x+1) = \frac{1}{2}$, aber $x - \frac{1}{2}(2x+1) = -\frac{1}{2}$. Der mit „d.h.“ eingeleitete Schluß ist also falsch.

b) Das *geometrische Mittel* zweier positiver Zahlen a, b ist die Quadratwurzel ihres Produkts, also die Zahl $\sqrt{ab}$. Zeigen Sie mit Hilfe der binomischen Formeln, daß es stets kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel $\frac{1}{2}(a+b)$ der beiden Zahlen ist!

Lösung: Da sowohl $\sqrt{ab}$ als auch $\frac{1}{2}(a+b)$ positiv sind, ist die Ungleichung $\sqrt{ab} \le \frac{1}{2}(a+b)$ gleichbedeutend mit der entsprechenden Ungleichung für die Quadrate, also

$$ab \le \frac{1}{4}(a+b)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + 2ab + b^2)\,.$$

Die Differenz der beiden Seiten ist

$$\frac{1}{4}(a^2 + 2ab + b^2) - ab = \frac{1}{4}(a^2 - 2ab + b^2) = \frac{1}{4}(a-b)^2 \ge 0\,,$$

was die Behauptung beweist.

c) Wann sind die beiden Mittelwerte gleich?

Lösung: Wenn sie gleich sind, verschwindet die Differenz ihrer Quadrate, die wir gerade mit $\frac{1}{4}(a-b)^2 = 0$ identifiziert haben. Dieser Ausdruck verschwindet nur für $a = b$, und in diesem Fall haben natürlich auch beide Mittelwerte den Wert $a = b$.

Aufgabe 5: *(12 Punkte)*
Entscheiden Sie für jede der hier definierten Folgen, ob sie konvergent, beschränkt und/oder monoton ist! Geben Sie im Falle der Konvergenz, soweit möglich, auch den Grenzwert an!

a) $x_n = \dfrac{10n+11}{11n-10}$ *b)* $y_n = \dfrac{e^n+1}{e^{2n}}$ *c)* $z_n = \dfrac{e^n+e^{-n}}{2^n}$ *d)* $w_n = (-1)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Lösung: *a)*

$$x_n = \frac{10n+11}{11n-10} = \frac{10}{11}\left(\frac{n+11/10}{n-10/11}\right) = \frac{10}{11}\left(\frac{n-10/11+10/11+11/10}{n-10/11}\right)$$
$$= \frac{10}{11}\left(1+\frac{10/11+11/10}{n-10/11}\right).$$

In der letzten Klammer steht 1 plus eine monoton fallende Nullfolge; somit konvergiert die Folge der x_n nach den Rechenregeln für Grenzwerte gegen 10/11, und sie ist monoton fallend. Daher ist sie durch $x_1 = 21$ nach oben beschränkt und durch ihren Grenzwert 10/11 nach unten.

b) $y_n = \dfrac{e^n+1}{e^{2n}} = \dfrac{e^n}{e^{2n}} + \dfrac{1}{e^{2n}} = e^{-n} + e^{-2n}$, die Folge ist also die Summe zweier Folgen der Form $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $q = e^{-1}$ *bzw.* $q = e^{-2}$; insbesondere ist in beiden Fällen $|q| < 1$. Daher sind beides monoton fallende Nullfolgen, also auch ihre Summe. Eine obere Schranke ist $y_1 = e^{-1} + e^{-2}$, eine untere natürlich die Null.

c) $z_n = \dfrac{e^n+e^{-n}}{2^n} = \dfrac{e^n}{2^n} + \dfrac{e^{-n}}{2^n} = \left(\dfrac{e}{2}\right)^n + \left(\dfrac{1}{2e}\right)^n$ ist, da $e/2 > 1$ ist, die Summe einer unbeschränkt wachsenden Folge und einer Nullfolge. Damit ist die Folge nicht beschränkt und insbesondere nicht konvergent. (Sie divergiert bestimmt gegen ∞.)

Wir erwarten, daß z_n zumindest bei großen Werten von n monoton wachsen sollte, denn zwar ist e^{-n} monoton fallend, hat aber im Vergleich zu e^n nur einen geringen Effekt. Um zu überprüfen, ob wirklich $z_{n+1} > z_n$ für *alle* n, berechnen wir die Differenz:

$$z_{n-1} - z_n = \frac{e^{n+1}+e^{-(n+1)}}{2^{n+1}} - \frac{e^n+e^{-n}}{2^n} = \frac{e^{n+1}+e^{-(n+1)}-2(e^n+e^{-n})}{2^{n+1}}$$
$$= \frac{e^{n+1}-2e^n+e^{(n+1)}-2e^{-n}}{2^{n+1}} = \frac{e^n(e-2)-e^{-(n+1)}(2e-1)}{2^{n+1}}.$$

Sie ist genau dann positiv, wenn ihr Zähler positiv ist, wenn also $e^n(e-2) > e^{-(n+1)}(2e-1)$ ist. Das wiederum gilt, da alle Faktoren positiv sind, genau dann, wenn

$$e^{2n+1} > \frac{2e-1}{e-2} = 2 + \frac{3}{e-2}.$$

Wegen $e-2 > \frac{1}{2}$ ist die rechte Seite kleiner als $2+6 = 8$; die linke ist mindestens e^3, und da $e > 2$, ist dies größer als $2^3 = 8$. Somit gilt die Ungleichung für alle n; die Folge ist also streng monoton wachsend.

d) $w_n = (-1)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ist die Summe aus einer Folge, die zyklisch zwischen 1 und -1 alterniert, und einer Nullfolge. Sie konvergiert nicht und ist auch nicht monoton, da die Folgenglieder für große n abwechselnd nahe bei 1 und nahe bei -1 sind. Die Folge ist nach unten beschränkt durch -1 und nach oben durch 5/4

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*

Bestimmen Sie, sofern es existiert, das Infimum und das Supremum der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$:

a) $A = (1, 2) \cup [3, 4]$ *b)* $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 < 9\}$ *c)* $C = \{1 - e^{-n} \mid n \in \mathbb{Z}\}$!

Lösung:

a) Da das erste Intervall links vom zweiten liegt, ist seine Untergrenze eine untere Schranke für A; eine größere kann es nicht geben, denn zu jedem $N > 1$ gibt es ein Element von $(1, 2)$, das größer ist. Das Infimum von A ist also 1. Das Supremum ist entsprechend gleich 4, denn als Obergrenze des rechtsliegenden Intervalls ist das eine obere Schranke, und zu jeder kleineren Zahl gibt es ein Element von $(3, 4)$, das größer ist.

b) $x^4 < 9$ gilt genau dann, wenn $x^2 < 3$ ist, d.h. $|x| < \sqrt{3}$. Somit ist $B = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$; das Infimum ist also $-\sqrt{3}$ und das Supremum $\sqrt{3}$.

c) Für negative $n = -m$ ist $1 - e^{-n} = 1 - e^{m}$; da $1 - e^{m}$ für hinreichend große m kleiner wird als jede Schranke $M \in \mathbb{R}$, hat B keine untere Schranke und damit kein Infimum. Für $n \geq 0$ ist $1 - e^{-n}$ monoton wachsend und $\lim_{n\to\infty} (1 - e^{-n}) = 1$. Somit ist eins die kleinste obere Schranke, also das Supremum.

Aufgabe 7: *(6 Punkte)*

In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } |x| < 1 \\ e^{(x-1)(x+3)} & \text{falls } 1 \leq |x| \leq 3 \\ (x+4)^2 & \text{falls } |x| > 3 \end{cases}$$

stetig?

Lösung: Für $x \notin \{\pm 1, \pm 3\}$ stimmt f mit einer Funktion überein, die aus Grundrechenarten und gegebenenfalls der Exponentialfunktion zusammengesetzt ist; dort ist f also stetig.

Für $x = \pm 1$ ist $x^2 = 1$, während $e^{(x-1)(x+3)}$ zwar für $x = 1$ ebenfalls eins ist, für $x = -1$ aber gleich $e^{-4} \neq 1$. Somit ist f zwar stetig an der Stelle $x = 1$, nicht aber bei $x = -1$.

Für $x = 3$ ist $e^{(x-1)(x+3)} = e^{12}$ und $(x+4)^2 = 49$, was deutlich kleiner ist. Dort ist f also nicht stetig.

Für $x = -3$ ist $e^{(x-1)(x+3)} = e^0 = 1 = (x+4)^3$; dort ist die Funktion stetig.

f ist somit stetig in allen Punkten $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$.