Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

10. November 2012

Zwischenklausur Analysis I

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •
• • • Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge • • •
• • • bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst • • •
• • • auf das, womit sie schnell Punkte holen können! • • •

Fragen: *(je zwei Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Für drei Mengen A, B, C gilt: Ist $A \subseteq B$ und $A \subseteq C$, so ist $A \subseteq B \cap C$.

2) Richtig oder falsch: Für eine komplexe Zahl $z \neq 0$ ist die Differenz $z - \overline{z}$ zur konjugiert komplexen Zahl $\overline{z}$ reell.

3) Richtig oder falsch: Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ ist $|x| + |y| - |z| \leq |x + y - z| \leq |x| + |y| + |z|$.

4) Richtig oder falsch: Die Differenz zweier monoton wachsender Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist auch monoton wachsend.

5) Richtig oder falsch: $\sqrt{8} \in \mathbb{Q}$

6) Richtig oder falsch: Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, so ist das Bild eines jeden offenen Intervalls unter f wieder ein offenes Intervall.

7) Richtig oder falsch: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ konvergiert.

8) Richtig oder falsch: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2}$ konvergiert.

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*
Stellen Sie die Zahlen

a) $\dfrac{10 - \sqrt{11}}{10 + \sqrt{11}}$ und *b)* $(1 + i)^{2012}$ möglichst einfach dar, und geben Sie bei *b)* an, wie viele Dezimalstellen der Betrag des Ergebnisses hat! (Hinweis: $\log_{10} 2 \approx 0{,}30103$)

Aufgabe 2: (*5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl n ist $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3$!

b) Was ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k^3$?

Hinweis: Wir wissen aus der Vorlesung, daß die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gleich $\frac{1}{2}n(n+1)$ ist. Im übrigen kann hier, wie so oft in der Mathematik, geschicktes Ausklammern und Zusammenfassen viel Rechnung ersparen.

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

$f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ sei eine streng monoton wachsende stetige Funktion. Konstruieren Sie eine Intervallschachtelung $\big([a_n, b_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ für einen Punkt $x \in [a, b]$ mit $f(x) = \frac{1}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$!

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

a) Finden Sie den Fehler im folgenden „Beweis“:
Für eine reelle Zahl x ist $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, also $(x+1)^2 - 2x - 1 = x^2$. Subtraktion von $x(2x+1)$ auf beiden Seiten macht daraus $(x+1)^2 - (x+1)(2x+1) = x^2 - x(2x+1)$. Addieren wir noch auf beiden Seiten das Quadrat von $\frac{1}{2}(2x+1)$, erhalten wir

$$(x+1)^2 - 2(x+1)\cdot\frac{2x+1}{2} + \left(\frac{2x+1}{2}\right)^2 = x^2 - 2x\cdot\frac{2x+1}{2} + \left(\frac{2x+1}{2}\right)^2$$

oder $\left((x+1) - \frac{2x+1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{2x+1}{2}\right)^2$, d.h. $(x+1) - \frac{1}{2}(2x+1) = x - \frac{1}{2}(2x+1)$ und damit $x+1 = x$.

b) Das *geometrische Mittel* zweier positiver Zahlen a, b ist die Quadratwurzel ihres Produkts, also die Zahl $\sqrt{ab}$. Zeigen Sie mit Hilfe der binomischen Formeln, daß es stets kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel $\frac{1}{2}(a+b)$ der beiden Zahlen ist!

c) Wann sind die beiden Mittelwerte gleich?

Aufgabe 5: *(12 Punkte)*

Entscheiden Sie für jede der hier definierten Folgen, ob sie konvergent, beschränkt und/oder monoton ist! Geben Sie im Falle der Konvergenz, soweit möglich, auch den Grenzwert an!

a) $x_n = \dfrac{10n+11}{11n-10}$ *b)* $y_n = \dfrac{e^n+1}{e^{2n}}$ *c)* $z_n = \dfrac{e^n + e^{-n}}{2^n}$ *d)* $w_n = (-1)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*

Bestimmen Sie, sofern es existiert, das Infimum und das Supremum der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$:

a) $A = (1, 2) \cup [3, 4]$ *b)* $B = \big\{x \in \mathbb{R} \bigm| x^4 < 9\big\}$ *c)* $C = \big\{1 - e^{-n} \bigm| n \in \mathbb{Z}\big\}$!

Aufgabe 7: *(6 Punkte)*

In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } |x| < 1 \\ e^{(x-1)(x+3)} & \text{falls } 1 \le |x| \le 3 \\ (x+4)^2 & \text{falls } |x| > 3 \end{cases}$$

stetig?

Abgabe bis zum Samstag, dem 10. November 2012, um 12^{00} Uhr

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •