WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

2. Februar 2013

Modulklausur Analysis I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •
• • • **Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge** • • •
• • • **bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst** • • •
• • • **auf das, womit sie schnell Punkte holen können!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergiert auch die Folge $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ der Beträge.

Lösung: *Richtig,* denn die Betragsfunktion ist stetig, und für jede stetige Funktion f gilt: Ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

2) Richtig oder falsch: Jede stetig differenzierbare injektive Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist entweder monoton wachsend oder monoton fallend.

Lösung: *Richtig:* Ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist f monoton wachsend, falls $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist f monoton fallend. Falls die Behauptung falsch wäre, gäbe es daher $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $f'(x_1) > 0$ und $f'(x_2) < 0$. An irgendeinem Punkt x_3 zwischen x_1 und x_2 hätte die stetige Funktion f' dann einen Vorzeichenwechsel, f also ein lokales Extremum, und damit wäre f in der Umgebung von x_3 nicht injektiv.

Alternativ: Wäre f weder monoton wachsend noch monoton fallend, so gäbe es insbesondere drei Zahlen $x_1 < x_2 < x_3$, so daß $f(x_1) < f(x_2)$, aber $f(x_2) > f(x_3)$ wäre (oder umgekehrt). Bezeichnet y das Minimum (Maximum) von $f(x_1)$ und $f(x_3)$ gäbe es dann nach dem Zwischenwertsatz sowohl im Intervall $[x_1, x_2]$ als auch im Intervall $[x_2, x_3]$ ein Punkt mit Funktionswert y, im Widerspruch zur Injektivität. (Man beachte, daß für diesen zweiten Ansatz die Stetigkeit von f genügt.)

3) Richtig oder falsch: Jede bijektive Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist entweder monoton wachsend oder monoton fallend.

Lösung: *Falsch;* ein Gegenbeispiel ist etwa die Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } x \notin \mathbb{Z} \\ x+1 & \text{falls } x \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

Sie ist zwar bijektiv, aber nicht monoton wachsend, da $f(1) = 2 > \frac{3}{2} = f\left(\frac{3}{2}\right)$, und sie ist auch nicht monoton fallend, denn $f(1) = 2 < 3 = f(2)$.

4) Richtig oder falsch: Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2^k}$ konvergiert.

Lösung: *Richtig,* denn für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $2^k > k$, also $e^{-2^k} < e^{-k}$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$ ist eine geometrische Reihe mit Quotient $e^{-1} < 1$, also konvergiert sie, und da beide

Reihen nur positive Terme haben, konvergiert auch die betrachtete Reihe nach dem Majorantenkriterium.
Alternativ läßt sich hier auch das Quotientenkriterium anwenden:

$$\frac{e^{-2^{k+1}}}{e^{-2^k}} = \frac{e^{2^k}}{e^{2^{k+1}}} = e^{2^k - 2^{k+1}} = e^{-2^k} \le e^{-2} < 1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

5) *Richtig oder falsch:* Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{2^{-k}}$ konvergiert.

Lösung: *Falsch;* da jeder Summand größer als eins ist, muß diese Reihe (bestimmt gegen $+\infty$) divergieren.

6) Was ist $\int\limits_0^1 (e^{2x} - \cos \pi x)\, dx$?

Lösung: $\int\limits_0^1 (e^{2x} - \cos \pi x)\, dx = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{\sin \pi x}{\pi}\Big|_0^1 = \frac{e^2 - 1}{2}$, da $\sin 0 = \sin \pi = 0$ ist.

Aufgabe 1: (*7 Punkte)*

a) Stellen Sie die Zahl $x = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$ möglichst einfach dar und zeigen Sie, daß $0 < x < 1$ ist!

Lösung: Wir erweitern so, daß wir im Nenner die dritte binomische Formel anwenden können, also mit $\sqrt{7} - \sqrt{5}$:

$$x = \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{5})^2}{(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})} = \frac{7 - 2\sqrt{35} + 5}{7 - 5} = 6 - \sqrt{35}\,.$$

Dies ist positiv, da $6^2 = 36 > 35$ ist, und kleiner als eins, denn $(\sqrt{35} + 1)^2 = 35 + 2\sqrt{35} + 1$ ist größer als 36.

b) Schreiben Sie die komplexe Zahl $z_1 = \frac{1 + i}{1 - i}$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$!

Lösung: Auch hier wenden wir wieder die dritte binomische Formel an:

$$z_2 = \frac{(1 + i)^2}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{1 + 2i - 1}{1 - (-1)} = \frac{2i}{2} = i = 0 + 1 \cdot i\,.$$

c) *dito* für $z_2 = \frac{(1 + i)^{2013}}{(1 - i)^{2013}}$!

Lösung: Offensichtlich ist $z_2 = z_1^{2013} = i^{2013} = i^{2012} \cdot i = i$, denn 2012 ist durch vier teilbar.

d) Finden Sie alle komplexen Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 - 2iz + 15 = 0$!

Lösung: Wir schreiben die Gleichung als

$$(z - i)^2 + 1 + 15 = (z - i)^2 + 16 = 0 \quad \text{oder} \quad (z - i)^2 = -16\,.$$

Dies gilt genau dann, wenn $z - i = \pm 4i$ ist, die Lösungen sind also $i + 4i = 5i$ und $i - 4i = -3i$.

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

Zeigen Sie: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+3) = 4 + 10 + \cdots + n(n+3) = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$!

Lösung: Das kann beispielsweise durch vollständige Induktion bewiesen werden: Für den Induktionsanfang muß gezeigt werden, daß

$$\sum_{k=1}^{1} k(k+3) = 1 \cdot 4 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 6}{3}$$

ist; das ist offensichtlich der Fall.

Ist die Behauptung für ein festes $n \in \mathbb{N}$ bewiesen, ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k(k+3) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+3) + (n+1)(n+4) \underset{\text{IA}}{=} \frac{n(n+1)(n+5)}{3} + (n+1)(n+4) \\ &= \frac{n(n+1)(n+5) + 3(n+1)(n+4)}{3} = \frac{(n+1)\big(n(n+5) + 3(n+4)\big)}{3} \\ &= \frac{(n+1)(n^2+5n+3n+12)}{3} = \frac{(n+1)(n^2+8n+12)}{3}\,.\end{aligned}$$

Wir müssen zeigen, daß dies gleich

$$\frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)\big((n+1)+5\big)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+6)}{3}$$

ist; wegen $(n+2)(n+6) = n^2+8n+12$ ist das in der Tat so. Daher gilt die Behauptung, falls sie für n gilt, auch für $n+1$; nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die behauptete Formel daher für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3: *(14 Punkte)*

a) In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \underset{\text{def}}{=} \frac{\sin 2x}{x} - 2 & \text{für } x < 0 \\ f_2(x) \underset{\text{def}}{=} x^3 - x^2 & \text{für } 0 < x < 1 \\ f_3(x) \underset{\text{def}}{=} e^{x-1} & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

stetig, in welchen differenzierbar?

Lösung: $f_1(x) = \frac{\sin 2x}{x} - 2$ ist stetig und differenzierbar für alle $x \neq 0$, denn $\sin 2x$ ist stetig und differenzierbar, und solange $x \neq 0$, ändert auch die Division durch x nichts daran, und die Subtraktion der Zwei ist erst recht problemlos.

f_2 ist als Polynom ohnehin auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar, genauso auch die Exponentialfunktion f_3. Somit ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ stetig und differenzierbar, denn in der Umgebung eines jeden Punktes aus dieser Menge stimmt es mit einer der drei Funktionen f_i überein.

Zu untersuchen bleibt der Punkt $x = 1$. Hier ist $f_2(x) = 1 - 1 = 0$ und $f_3(x) = e^0 = 1$, die Funktion ist dort also nicht stetig und somit erst recht nicht differenzierbar.

b) Läßt sich f fortsetzen zu einer im Punkt $x = 0$ stetigen Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Lösung: Das ist genau dann möglich, wenn der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert für $x \to 0$ übereinstimmen. Links ist $f(x) = f_1(x)$, und diese Funktion ist im Punkt $x = 0$ nicht definiert. Da dort sowohl $\sin 2x$ als auch x verschwinden, können wir aber versuchen, mit der Regel von DE L'HÔPITAL einen Grenzwert zu bestimmen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{1} = 2\,, \quad \text{also ist} \quad \lim_{x\to 0} f_1(x) = 2 - 2 = 0\,.$$

Da auch $f_2(0)$ verschwindet, läßt sich die Funktion durch die Definition $f(0) = 0$ stetig fortsetzen.

c) Läßt sich f fortsetzen zu einer im Punkt $x = 0$ differenzierbaren Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Lösung: Dazu müssen wir die Ableitungen betrachten:

$$f_1'(x) = \frac{2x\cos 2x - \sin 2x}{x^2}$$

wird im Nullpunkt wieder ein Ausdruck der Form „$\frac{0}{0}$"; wir können also wieder die Regel von DE L'HÔPITAL anwenden und erhalten

$$\lim_{x\to 0} f_1'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x - 4x\sin 2x - 2\cos 2x}{2x} = \lim_{x\to 0}(-2\sin 2x) = 0\,;$$

da auch $f_2'(x) = 3x^2 - 2x$ im Nullpunkt verschwindet, ist die in *b)* stetig fortgesetzte Funktion also im Nullpunkt differenzierbar.

d) Was sind

$$\int_0^1 f(x)\,dx, \qquad \int_1^2 f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^2 f(x)\,dx\,?$$

Lösung: Da es bei der Integration auf isolierte Punkte nicht ankommt, ist

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f_2(x)\,dx = \int_0^1 (x^3 - x^2)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}\,.$$

$e^{x-1} = e^{-1}e^x$ hat sich selbst als Stammfunktion; also ist

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 e^{x-1}\,dx = \left. e^{x-1}\right|_1^2 = e - 1\,.$$

Damit ist $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = -\frac{1}{12} + e - 1 = e - \frac{13}{12}\,.$

e) Wo ist die Funktion

$$g\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

stetig, wo differenzierbar?

Lösung: Für $x \neq 0$ auf jeden Fall, denn sie ist nur aus Grundrechenarten und der Sinusfunktion zusammengesetzt, und die Division durch x ist für $x \neq 0$ problemlos.
Im Punkt $x = 0$ ist der Ausdruck $\sin \frac{1}{x}$ nicht definiert; da aber für jedes $x \neq 0$ der Betrag von $\sin \frac{1}{x}$ höchstens gleich eins ist, ist $\left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x|$, und damit ist $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$. Die Funktion ist somit im Nullpunkt stetig.
Die Ableitung von $x \sin \frac{1}{x}$ ist nach Produkt- und Kettenregel

$$\sin \frac{1}{x} + x \cos \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} .$$

Diese Funktion kann keinen Grenzwert für $x \to 0$ haben, denn $\cos \frac{1}{x}$ nimmt auch beliebig nahe der Null immer wieder den Wert eins an, so daß sich der Gesamtausdruck beliebig weit von der Null entfernen kann; andererseits aber ist er auch in jeder beliebig kleinen Umgebung der Null immer wieder gleich null. Somit ist g im Nullpunkt nicht differenzierbar.

Aufgabe 4: *(10 Punkte)*

a) Wo hat die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$ ihre lokalen Maxima, wo die Minima? Welche Funktionswerte werden dort angenommen?

Lösung: Da f differenzierbar ist, muß in einem lokalen Extremum die Ableitung

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

verschwinden; die einzigen Kandidaten für lokale Extrema sind daher $x = -2$ und $x = 0$. Für $x < -2$ und für $x > 0$ ist $f'(x) > 0$, die Funktion f also monoton steigend; für $-2 < x < 0$ ist $f'(x) < 0$, die Funktion f also monoton fallend. Somit liegt bei $x = -2$ ein lokales Maximum mit $f(-2) = 1$, bei $x = 0$ ein lokales Minimum mit $f(0) = -3$.

b) Zeigen Sie, daß f im Intervall $[-3, 1]$ genau drei reelle Nullstellen hat!

Lösung: Da $f(-2) = 1$ und $f(0) = -3$ verschiedene Vorzeichen haben, gibt es auf jeden Fall eine Nullstelle im Intervall $(-2, 0)$. Außerdem ist $f(-3) = -3$ und $f(1) = 1$, also gibt es auch im Intervall $(-3, -2)$ und im Intervall $(0, 1)$ noch jeweils mindestens eine Nullstelle. Da ein nichtverschwindendes kubisches Polynom höchstens drei reelle Nullstellen hat, liegt in jedem der drei Teilintervalle genau eine.

c) Wo ist die Funktion konvex, wo konkav?

Lösung: $f''(x) = 6x + 6$ ist für $x < -1$ negativ, also ist die Funktion dort konkav; für $x > -1$ ist sie konvex.

e) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar, und für zwei Zahlen $a < b \in \mathbb{R}$ sei $g(a) = g(b)$. Dann hat $g'(x)$ im Intervall $[a, b]$ ein positives Maximum, ein negatives Minimum sowie mindestens eine Nullstelle.

Lösung: *Falsch,* denn für eine konstante Funktion g verschwindet die Ableitung identisch. (Für nichtkonstante Funktionen ist die Behauptung richtig, denn die Funktion $h(x) = g(x) - g(a)$ verschwindet bei $x = a$ und bei $x = b$, also hat $h'(x) = g'(x)$ nach dem Satz von ROLLE mindestens eine Nullstelle vom Intervall $[a, b]$. Außerdem nimmt g' als stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ sowohl sein Maximum als auch sein Minimum an. Da g' eine Nullstelle hat, ist das Maximum größer oder gleich null, das

Minimum kleiner oder gleich null. Wären beide gleich null, wäre die Funktion konstant. Wäre eines gleich null, das andere aber nicht, so wäre die Funktion monoton, aber nicht konstant, also könnte unmöglich $g(a) = g(b)$ sein. Somit ist das Maximum positiv und das Minimum negativ.)

f) Die stetige Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei injektiv und $f(0) > f(1)$. Auf welche Menge bildet f das offene Intervall $(0, 1)$ ab?

Lösung: Als injektive Funktion muß f auf $[0, 1]$ monoton sein; da $f(0) > f(1)$, ist f monoton fallend. Also wird $[0, 1]$ auf $[f(1), f(0)]$ abgebildet und damit, wegen der Injektivität, $(0, 1)$ auf $\big(f(1), f(0)\big)$.

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*
Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom dritten Grades der Funktion $f(x) = e^{\sin 2x}$ um den Nullpunkt!

Lösung: Wir brauchen zunächst die Ableitungen von f an der Stelle $x = 0$; nach der Kettenregel ist

$$f'(x) = 2\cos 2x\, e^{\sin 2x}\,, \quad \text{also} \quad f'(0) = 2\,.$$

Für die weiteren Ableitungen müssen wir dieses Resultat sowie die Produktregel anwenden: Wenn wir jeweils $e^{\sin 2x}$ als einen der beiden Faktoren nehmen, erhalten wir

$$\begin{array}{llcl}
f(x) &= e^{\sin 2x} & f(0) &= 1\\
f'(x) &= e^{\sin 2x}(2\cos 2x) & f'(0) &= 2\\
f''(x) &= e^{\sin 2x}(-4\sin 2x + 4\cos^2 2x) & f''(0) &= 4\\
f'''(x) &= e^{\sin 2x}\big(-8\cos 2x - 16\cos 2x \sin 2x + 2\cos 2x \cdot (-4\sin 2x + 4\cos^2 2x)\big) & & \\
&= e^{\sin 2x}(-8\cos 2x - 24\cos 2x \sin 2x + 8\cos^3 2x) & f'''(0) &= 0\,.
\end{array}$$

Das TAYLOR-Polynom dritten Grades um den Nullpunkt ist somit $T_{f,0}(h) = 1 + 2h + 2h^2$.

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*

a) Drücken Sie $\cos^4 x - \sin^4 x$ aus als Linearkombination von Funktionen der Form $\cos ax$ mit $a \in \mathbb{R}$!

Lösung: Nach den EULERschen Formeln ist

$$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}}{16}$$

und

$$\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}}{16}\,.$$

Somit ist

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{8e^{2ix} + 8e^{-2ix}}{16} = \cos 2x\,.$$

b) Finden Sie alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$!

Lösung: Nach *a)* ist $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$, und diese Funktion hat natürlich $\frac{1}{2}\sin 2x$ als Stammfunktion. Da sich zwei Stammfunktionen nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung um eine additive Konstante unterscheiden, läßt sich daher jede solche Funktion f schreiben als $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + C$ mit einer reellen Zahl C.