Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

2. Februar 2013

Modulklausur Analysis I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •
• • • **Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge** • • •
• • • **bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst** • • •
• • • **auf das, womit sie schnell Punkte holen können!** • • •

Fragen: *(je zwei Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergiert auch die Folge $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ der Beträge.

2) *Richtig oder falsch:* Jede stetig differenzierbare injektive Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist entweder monoton wachsend oder monoton fallend.

3) *Richtig oder falsch:* Jede bijektive Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist entweder monoton wachsend oder monoton fallend.

4) *Richtig oder falsch:* Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2^k}$ konvergiert.

5) *Richtig oder falsch:* Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{2^{-k}}$ konvergiert.

6) Was ist $\displaystyle\int_0^1 (e^{2x} - \cos\pi x)\,dx$?

Aufgabe 1: (*7 Punkte)*

a) Stellen Sie die Zahl $x = \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ möglichst einfach dar und zeigen Sie, daß $0 < x < 1$ ist!

b) Schreiben Sie die komplexe Zahl $z_1 = \dfrac{1+i}{1-i}$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$!

c) *dito* für $z_2 = \dfrac{(1+i)^{2013}}{(1-i)^{2013}}$!

d) Finden Sie alle komplexen Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 - 2iz + 15 = 0$!

Aufgabe 2: (*5 Punkte)*

Zeigen Sie: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+3) = 4 + 10 + \cdots + n(n+3) = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$!

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 3: *(14 Punkte)*

a) In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \underset{\text{def}}{=} \frac{\sin 2x}{x} - 2 & \text{für } x < 0 \\ f_2(x) \underset{\text{def}}{=} x^3 - x^2 & \text{für } 0 < x < 1 \\ f_3(x) \underset{\text{def}}{=} e^{x-1} & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

stetig, in welchen differenzierbar?

b) Läßt sich f fortsetzen zu einer im Punkt $x = 0$ stetigen Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

c) Läßt sich f fortsetzen zu einer im Punkt $x = 0$ differenzierbaren Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

d) Was sind

$$\int_0^1 f(x)\,dx, \qquad \int_1^2 f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^2 f(x)\,dx\,?$$

e) Wo ist die Funktion

$$g\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

stetig, wo differenzierbar?

Aufgabe 4: *(10 Punkte)*

a) Wo hat die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$ ihre lokalen Maxima, wo die Minima? Welche Funktionswerte werden dort angenommen?

b) Zeigen Sie, daß f im Intervall $[-3, 1]$ genau drei reelle Nullstellen hat!

c) Wo ist die Funktion konvex, wo konkav?

e) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar, und für zwei Zahlen $a < b \in \mathbb{R}$ sei $g(a) = g(b)$. Dann hat $g'(x)$ im Intervall $[a, b]$ ein positives Maximum, ein negatives Minimum sowie mindestens eine Nullstelle.

f) Die stetige Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei injektiv und $f(0) > f(1)$. Auf welche Menge bildet f das offene Intervall $(0, 1)$ ab?

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom dritten Grades der Funktion $f(x) = e^{\sin 2x}$ um den Nullpunkt!

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*

a) Drücken Sie $\cos^4 x - \sin^4 x$ aus als Linearkombination von Funktionen der Form $\cos ax$ mit $a \in \mathbb{R}$!

b) Finden Sie alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$!

Abgabe bis zum Samstag, dem 2. Februar 2013, um 10^{30} Uhr

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •