WOLFGANG K. SEILER
*Tel.* 2515

A5, C201

*21. Dezember 2012*

# Modulklausur Analysis I

**• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •**
**• • • Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge • • •**
**• • • bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst • • •**
**• • • auf das, womit sie schnell Punkte holen können! • • •**

**Fragen:** *(je* **zwei** *Punkte)*
*Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine* kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

*1) Richtig oder falsch:* Jede monoton fallende Folge positiver Zahlen konvergiert.

**Lösung:** *Richtig:* Eine Folge positiver Zahlen ist durch die Null nach unten beschränkt, und jede monoton fallende nach unten beschränkte Folge konvergiert.

*2) Richtig oder falsch:* Jede strikt monoton wachsende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist injektiv.

**Lösung:** *Richtig:* Ist $x \neq y$, so können wir o.B.d.A. annehmen, daß $x < y$ ist; wegen der strikten Monotonie ist dann $f(x) < f(y)$, insbesondere also $f(x) \neq f(y)$.

*3) Richtig oder falsch:* Jede strikt monoton fallende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist surjektiv.

**Lösung:** *Falsch;* ein Gegenbeispiel ist etwa die Funktion $f(x) = -e^x$, die nur negative Werte annimmt, oder $f(x) = e^{-x}$ mit nur positiven Werten oder $f(x) = -\arctan x$ mit Werten nur aus $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ oder ...

*4) Richtig oder falsch:* Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3+1}$ konvergiert.

**Lösung:** *Richtig,* denn für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $k^3 + 1 \geq k^3 \geq k^2$, also $1/(k^3+1) \leq 1/k^2$. Wie wir aus der Vorlesung wissen, konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$; da beide betrachteten Reihen nur positive Terme haben, konvergiert die betrachtete Reihe also nach dem Majorantenkriterium.

**NB:** Es reicht nicht, daß die Folge der Summanden $1/(k^3+1)$ eine Nullfolge ist; schließlich divergiert die harmonische Reihe. Auch ein Vergleich mit geometrischen Reihen führt hier nicht zum Ziel, denn der Quotient zweier aufeinanderfolgender Summanden konvergiert hier gegen eins.

*5)* Für die differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $f'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(0) = 2$. Was ist $f(x)$ ?

**Lösung:** Wenn $f'(x) = f(x)$ ist, muß $f(x)$ laut Voprlesung ein Vielfaches der Exponentialfunktion sein. Da $e^0 = 1$ aber $f(0) = 2$ ist, ist $f(x) = 2e^x$.

*6)* Was ist $\displaystyle\int_0^{\pi} (x^3 + 2\cos 2x)\,dx$ ?

**Lösung:** $\int_0^\pi (x^3 + 2\cos 2x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} + \sin 2x\right|_0^\pi = \frac{\pi^4}{4}$, da $\sin 2x$ als Ableitung $2\cos 2x$ hat und der Sinus bei allen ganzzahligen Vielfachen von $\pi$ verschwindet.

**Aufgabe 1:** *(7 Punkte)*
Stellen Sie die Zahlen

*a)* $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ *b)* $(i-\sqrt{3})^3$ und *c)* $\left(\frac{i-\sqrt{3}}{2}\right)^{2013}$ möglichst einfach dar!

**Lösung:** Bei *a)* erweitern wir so, daß wir im Nenner die dritte binomische Formel anwenden können, also mit $3+\sqrt{5}$:

$$\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})^2}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{9+6\sqrt{5}+5}{9-5} = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5}\,.$$

Für *b)* berechnen wir zunächst

$$(i-\sqrt{3})^2 = i^2 - 2i\sqrt{3} + 3 = 2 - 2i\sqrt{3}$$

und multiplizieren dies nochmals mit $(i-\sqrt{3})$:

$$(2-2i\sqrt{3})(i-\sqrt{3}) = 2i - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2i\cdot 3 = 8i\,.$$

Also ist $(I-\sqrt{3})^3 = 8i$.

Für *c)* folgt daraus, daß $\left(\frac{i-\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{(i-\sqrt{3})^3}{2^3} = \frac{8i}{8} = i$ ist; außerdem ist $2013 = 3\cdot 671$, also $\left(\frac{i-\sqrt{3}}{2}\right)^{2013} = i^{671} = i^3 = -i$, denn $671 : 4 = 167$ Rest 3.

*d)* Finden Sie alle komplexen Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 + 6iz - 13 = 0$ !

**Lösung:** Wir schreiben die Gleichung als

$$(z+3i)^2 + 9 - 13 = (z+3i)^2 - 4 = 0 \quad \text{oder} \quad (z+3i)^2 = 4\,.$$

Dies gilt genau dann, wenn $z + 3i = \pm 2$ ist, die Lösungen sind also $2-3i$ und $-2-3i$.

**Aufgabe 2:** *(5 Punkte)*
Zeigen Sie, daß $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 2 + 6 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$!

**Lösung:** Das kann beispielsweise durch vollständige Induktion bewiesen werden: Für den Induktionsanfang muß gezeigt werden, daß

$$\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1\cdot 2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}$$

ist; das ist offensichtlich der Fall.
Ist die Behauptung für ein festes $n \in \mathbb{N}$ bewiesen, ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2) \underset{\text{IA}}{=} \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3}\,.$$

Die elegante Lösung besteht darin, hier $(n+1)(n+2)$ auszuklammern, was sofort auf das gewünschte Ergebnis $\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$ führt; man kann aber auch mit Brachialgewalt ausmultiplizieren und erhält dann

$$\frac{(n^3+3n^2+2n)+3(n+1)(n+2)}{3} = \frac{n^3+6n^2+11n+6}{3}\,.$$

In diesem Fall muß noch gezeigt werden, daß dies gleich

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} = \frac{(n+1)(n^2+5n+6)}{3} = \frac{n^3+6n^2+11n+6}{3}$$

ist; auch das ist offensichtlich erfüllt. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die behauptete Formel somit für alle $n \in \mathbb{N}$.

**Aufgabe 3:** *(14 Punkte)*

*a)* In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für } x \le 0 \\ \sin \pi x & \text{für } 0 < x < 1 \\ \dfrac{e^x - e}{x-1} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

stetig, in welchen differenzierbar?

**Lösung:** $f_1(x) = x^3$ ist stetig und differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$, genauso auch $f_2(x) = \sin \pi x$. Die Funktion $f_3(x) = \frac{e^x-e}{x-1}$ ist im Punkt $x = 1$ nicht definiert; in allen anderen $x \in \mathbb{R}$ ist auch $f_3$ stetig und differenzierbar, da Zähler und Nenner stetig und differenzierbar sind und der Nenner nur bei $x = 1$ verschwindet. Somit muß für die Stetigkeit und Differenzierbarkeit von $f$ nur noch der Punkt $x = 0$ untersucht werden. Da $f_1(0) = 0^3 = 0$ und $f_2(0) = \sin(\pi \cdot 0) = 0$ übereinstimmen, ist $f$ auch dort stetig; da aber $f_1'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$ und $f_2'(0) = \pi \cdot \cos(\pi \cdot 0) = \pi$ ist, kann $f$ im Nullpunkt nicht differenzierbar sein. $f$ ist somit stetig auf ganz $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, aber nur differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

*b)* Läßt sich $f$ fortsetzen zu einer im Punkt $x = 1$ stetigen Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

**Lösung:** Das ist genau dann möglich, wenn der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert für $x \to 1$ übereinstimmen. Links ist $f(x) = f_2(x) = \sin \pi x$; der Grenzwert für $x \nearrow 1$ ist wegen der Stetigkeit von $f_2$ auf ganz $\mathbb{R}$ gleich $f_2(1) = \sin \pi = 0$. Rechts ist $f(x) = f_3(x)$, und diese Funktion ist bei $x = 1$ nicht definiert. Wir können jedoch nach der Regel von DE L'HÔPITAL einen Grenzwert bestimmen:

$$\lim_{x \searrow 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{e^x}{1} = e^1 = e\,.$$

Da der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert nicht übereinstimmen, läßt sich die Funktion nicht stetig fortsetzen in den Punkt $x = 1$.

*c)* Läßt sich $f$ fortsetzen zu einer im Punkt $x = 1$ differenzierbaren Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

**Lösung:** Natürlich nicht, denn eine solche Funktion wäre erst recht stetig bei $x = 1$.

*d)* Was sind

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx, \qquad \int_{0}^{1} f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx\,?$$

**Lösung:**

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{0} = -\frac{1}{4}$$

und, da es auf die Werte in isolierten Punkten nicht ankommt, ist auch

$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} \sin \pi x\,dx = \left.\frac{-\cos \pi x}{\pi}\right|_{0}^{1} = \frac{1-(-1)}{\pi} = \frac{2}{\pi}\,.$$

Damit ist $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{4}\,.$

*e)* *Richtig oder falsch:* Sind $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und stimmen für ein $a \in \mathbb{R}$ die Ableitungen $g'(a)$ und $h'(a)$ überein, so ist auch die Funktion

$$p\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} g(x) & \text{für } x \le a \\ h(x) & \text{für } x > a \end{cases} \end{cases}$$

differenzierbar.

**Lösung:** *Falsch,* denn $p$ muß im Punkt $a$ nicht stetig sein. Ein einfaches Gegenbeispiel sind die Funktionen $g(x) = x$ und $h(x) = x + 1$: Hier ist $g'(a) = h'(a)$ sogar für alle $a \in \mathbb{R}$, aber natürlich kann man die beiden Geraden nirgends zu einer stetigen Funktion zusammensetzen.

**Aufgabe 4:** (*10 Punkte*)

*a)* Wo hat die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - 12x + 4$ ihre lokalen Maxima, wo die Minima? Welche Funktionswerte werden dort angenommen?

**Lösung:** Da $f$ differenzierbar ist, muß in einem lokalen Extremum die Ableitung

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x+2)(x-2)$$

verschwinden; die einzigen Kandidaten für lokale Extrema sind daher $x = -2$ und $x = +2$. Für $x < -2$ und für $x > 2$ ist $f'(x) > 0$, die Funktion $f$ also monoton steigend; für $-2 < x < 2$ ist $f'(x) < 0$, die Funktion $f$ also monoton fallend. Somit liegt bei $x = -2$ ein lokales Maximum mit $f(-2) = 20$, bei $x = 2$ ein lokales Minimum mit $f(2) = -12$.

*b)* Zeigen Sie, daß $f$ im Intervall $[-4, 4]$ genau drei relle Nullstellen hat!

**Lösung:** Da $f(-2) = 20$ und $f(2) = -12$ verschiedene Vorzeichen haben, gibt es auf jeden Fall eine Nullstelle im Intervall $(-2, 2)$. Außerdem ist $f(-4) = -12$ und $f(4) = 20$, also gibt es auch im Intervall $(-4, -2)$ und im Intervall $(2, 4)$ noch jeweils mindestens eine Nullstelle. Da ein nichtverschwindendes kubisches Polynom höchstens drei reelle Nullstellen hat, liegt in jedem der drei Teilintervalle genau eine.

*c)* Wo ist die Funktion konvex, wo konkav?

**Lösung:** $f''(x) = 6x$ ist für $x < 0$ negativ, also ist die Funktion dort konkav; für $x > 0$ ist sie konvex.

*e)* *Richtig oder falsch:* Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und für zwei Zahlen $a < b \in \mathbb{R}$ sei $g(a) = g(b) = 0$. Dann gibt es im Intervall $(a, b)$ mindestens ein lokales Maximum oder Minimum.

**Lösung:** *Richtig,* denn die stetige Funktion $g$ nimmt auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum an. Sind beide gleich Null, ist die Funktion konstant und jeder Punkt in $(a, b)$ ist lokales Maximum und Minimum; ist einer der beiden Werte von Null verschieden, so ist er als globales Maximum *bzw.* Minimum insbesondere auch ein lokales.

*f)* *Richtig oder falsch:* Die stetige Funktion $h\colon [a, b] \to [c, d]$ sei surjektiv. Dann ist $h$ monoton wachsend oder monoton fallend.

**Lösung:** *Falsch;* die Funktion $h\colon [0, 2\pi] \to [-1, 1]$ mit $h(x) = \sin x$ ist surjektiv, aber nicht monoton.

**Aufgabe 5:** *(6 Punkte)*
Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom dritten Grades der Funktion $f(x) = e^x \sin 2x$ um den Nullpunkt!

**Lösung:** Wir brauchen zunächst die Ableitungen von $f$ an der Stelle $x = 0$; indem wir jeweils die Exponentialfunktion als einen der Faktoren betrachten und die Produktregel anwenden, erhalten wir

$$\begin{array}{rcll} f(x) &=& e^x \sin 2x & f(0) = 0 \\ f'(x) &=& e^x(\sin 2x + 2\cos 2x) & f'(0) = 2 \\ f''(x) &=& e^x(\sin 2x + 2\cos 2x + 2\cos 2x - 4\sin 2x) & \\ &=& e^x(4\cos 2x - 3\sin 2x) & f''(0) = 2 \\ f'''(x) &=& e^x(4\cos 2x - 3\sin 2x - 8\sin 2x - 6\cos 2x) & \\ &=& -e^x(2\cos 2x + 11\sin 2x) & f'''(0) = -2\,. \end{array}$$

Das TAYLOR-Polynom dritten Grades um den Nullpunkt ist somit $T_{f,0}(h) = 2h + 2h^2 - \dfrac{h^3}{3}$.

**Aufgabe 6:** *(6 Punkte)*

*a)* Drücken Sie $\cos^2 x - \sin^2 x$ aus als Linearkombination von Funktionen der Form $\cos ax$ mit $a \in \mathbb{R}$!

**Lösung:** Nach den EULERschen Formeln ist

$$\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 \frac{e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$$

und

$$\sin^2 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}}{-4} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} .$$

Somit ist

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

*b)* Finden Sie alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ !

**Lösung:** Nach *a)* ist $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, und diese Funktion hat natürlich $\frac{1}{2}\sin 2x$ als Stammfunktion. Da sich zwei Stammfunktionen nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung um eine additive Konstante unterscheiden, läßt sich daher jede solche Funktion $f$ schreiben als $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + C$ mit einer reellen Zahl $C$.