WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

21. Dezember 2012

Modulklausur Analysis I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •
• • • **Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge** • • •
• • • **bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst** • • •
• • • **auf das, womit sie schnell Punkte holen können!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Jede monoton fallende Folge positiver Zahlen konvergiert.

2) Richtig oder falsch: Jede strikt monoton wachsende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist injektiv.

3) Richtig oder falsch: Jede strikt monoton fallende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist surjektiv.

4) Richtig oder falsch: Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3+1}$ konvergiert.

5) Für die differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $f'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(0) = 2$. Was ist $f(x)$?

6) Was ist $\displaystyle\int_0^{\pi} (x^3 + 2\cos 2x)\,dx$?

Aufgabe 1: (*7 Punkte)*
Stellen Sie die Zahlen

a) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ *b)* $(i-\sqrt{3})^3$ und *c)* $\left(\dfrac{i-\sqrt{3}}{2}\right)^{2013}$ möglichst einfach dar!

d) Finden Sie alle komplexen Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 + 6iz - 13 = 0$!

Aufgabe 2: (*5 Punkte)*
Zeigen Sie, daß $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 2 + 6 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$!

Aufgabe 3: *(14 Punkte)*

a) In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für } x \le 0 \\ \sin \pi x & \text{für } 0 < x < 1 \\ \dfrac{e^x - e}{x - 1} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

stetig, in welchen differenzierbar?

b) Läßt sich f fortsetzen zu einer im Punkt $x = 1$ stetigen Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

c) Läßt sich f fortsetzen zu einer im Punkt $x = 1$ differenzierbaren Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

d) Was sind

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx, \qquad \int_{0}^{1} f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx\,?$$

e) *Richtig oder falsch:* Sind $g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und stimmen für ein $a \in \mathbb{R}$ die Ableitungen $g'(a)$ und $h'(a)$ überein, so ist auch die Funktion

$$p: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} g(x) & \text{für } x \le a \\ h(x) & \text{für } x > a \end{cases} \end{cases}$$

differenzierbar.

Aufgabe 4: *(10 Punkte)*

a) Wo hat die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - 12x + 4$ ihre lokalen Maxima, wo die Minima? Welche Funktionswerte werden dort angenommen?

b) Zeigen Sie, daß f im Intervall $[-4, 4]$ genau drei relle Nullstellen hat!

c) Wo ist die Funktion konvex, wo konkav?

e) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und für zwei Zahlen $a < b \in \mathbb{R}$ sei $g(a) = g(b) = 0$. Dann gibt es im Intervall (a, b) mindestens ein lokales Maximum oder Minimum.

f) *Richtig oder falsch:* Die stetige Funktion $h: [a, b] \to [c, d]$ sei surjektiv. Dann ist h monoton wachsend oder monoton fallend.

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom dritten Grades der Funktion $f(x) = e^x \sin 2x$ um den Nullpunkt!

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*

a) Drücken Sie $\cos^2 x - \sin^2 x$ aus als Linearkombination von Funktionen der Form $\cos ax$ mit $a \in \mathbb{R}$!

b) Finden Sie alle Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$!

Abgabe bis zum Freitag, dem 21. Dezember 2012, um 10^{00} Uhr

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •