Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge zur Klausurvorbereitung

Die folgenden Themenvorschläge sind im gleichen Stil wie Fragen und Teilaufgaben der Modulklausur; sie sollen Ihnen helfen, noch vorhandene Schwachpunkte zu finden und so Ihre Klausurvorbereitung zu optimieren. Dies funktioniert aber natürlich nur, wenn Sie zunächst versuchen, die Aufgaben ohne Konsultation der Musterlösungen zu bearbeiten.

a) Richtig oder falsch: $\sqrt[3]{3} \in \mathbb{Q}$

Lösung: *Falsch:* Wäre $\sqrt[3]{3} \in \mathbb{Q}$, könnten wir es als gekürzten Bruch p/q mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ schreiben. Da die dritte Potenz dieses Bruchs drei wäre, müßte $p^3 = 3q^3$ sein, p^3 also eine Dreierzahl. Damit müßte auch p durch drei teilbar sein, etwa $p = 3k$. Also wäre $p^3 = (3k)^3 = 3^3k^3 = 3q^3$, und auch $q^3 = 3^2k^3$ müßte durch drei teilbar sein. Damit wäre aber q selbst eine Dreierzahl, der Bruch p/q also nicht gekürzt. Die Annahme, $\sqrt[3]{3}$ sei eine rationale Zahl, führt also zum Widerspruch. Somit liegt $\sqrt[3]{3}$ nicht in $\mathbb{Q}$.

b) Zeigen Sie: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k-1)^2 = \frac{6n^3+3n^2-n}{2}$!

Lösung: Beweis durch vollständige Induktion: Für $n = 1$ haben wir die offensichtlich richtige Formel

$$(3-1)^2 = 4 = \frac{6+3-1}{2}\,.$$

Falls wir die Behauptung für ein festes $n \in \mathbb{N}$ als korrekt annehmen, können wir die linke Seite der Formel für $n+1$ umformen zu

$$\sum_{k=1}^{n+1}(3k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(3k-1)^2 + \big(3(n+1)-1\big)^2 = \frac{6n^3+3n^2-n}{2} + (3n+2)^2$$
$$= \frac{6n^3+3n^2-n+2(9n^2+12n+4)}{2} = \frac{6n^3+21n^2+23n+8}{2}\,.$$

Für die rechte Seite erhalten wir entsprechend

$$\frac{6(n+1)^3+3(n+1)^2-(n+1)}{2} = \frac{6(n^3+3n^2+3n+1)+3(n^2+2n+1)-(n+1)}{2}$$
$$= \frac{6n^3+21n^2+23n+8}{2}\,.$$

Da beides übereinstimmt, gilt die Formel somit auch für $n+1$. Aus dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt daher, daß sie für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

c) Wir betrachten die durch $x_0 = 0, x_1 = 1$ und $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$ rekursiv definierte Folge. Durch vollständige Induktion können wir leicht zeigen, daß $x_n = 2^n - (-1)^n$ ist: Für $n = 0$ ist $2^0 - (-1)^0 = 1 - 1 = 0$, und wenn die Behauptung bis zu einem gewissen $n \in \mathbb{N}$

gilt, ist

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 2x_{n-1} = 2^n - (-1)^n + 2 \cdot (2^{n-1} - (-1)^{n-1}) \\ &= 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} - (-1)^n - 2 \cdot (-1)^{n-1} \\ &= 2^n + 2^n + (-1)^{n+1} - 2 \cdot (-1)^{n+1} = 2^{n+1} - (-1)^{n+1} . \end{aligned}$$

Somit ist $x_2 = 2^2 - 1 = 3$. Andererseits ist $x_2 = x_1 + 2x_0 = 1$. Was ist falsch?

Lösung: Die Folge der x_n hängt nicht nur ab von der Rekusionsvorschrift und dem Wert von x_0, sondern auch vom Wert von x_1. Deshalb hätten wir zum Induktionsanfang auch noch zeigen müssen, daß die Formel für $n = 1$ gilt: Hier können wir, da es kein x_{-1} gibt, die Rekursion nicht anwenden. Der Induktionsschritt in der hier dargestellten Form funktioniert nur für $n \geq 1$, nicht aber für den hier auch benötigten Schritt von $n = 0$ auf $n = 1$. (Die angegebene Formel gilt für die Folge mit $x_0 = 0$ und $x_1 = 3$, nicht für die mit $x_1 = 1$.)

d) Zeigen Sie: $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$!

Lösung: Da $\sqrt{3} < 2$ ist, steht rechts eine positive Zahl. Deren Quadrat ist

$$(2 - \sqrt{3})^2 = 4 - 2 \cdot 2\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3} .$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

e) Vereinfachen Sie den Ausdruck $\dfrac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-1}$!

Lösung: Nach den binomischen Formeln ist

$$\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-1} = \frac{(\sqrt{7}+1)^2}{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)} = \frac{7+2\sqrt{7}+1}{7-1} = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{3} .$$

f) *Richtig oder falsch:* $(1 + i)^{2012} \in \mathbb{R}$

Lösung: $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$, also ist $(1+i)^{2012} = (2i)^{1006} = 2^{1006} i^{1006} = -2^{1006}$, denn $i^4 = 1$ und 1004 ist durch vier teilbar. Somit ist die Behauptung richtig.

g) Finden Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 - 6z + 10 = 0$!

Lösung: $z^2 - 6z + 10 = (z-3)^2 + 1 = 0$ genau dann, wenn $(z-3)^2 = -1$ ist, also $z - 3 = \pm i$. Somit sind $z = 3 \pm i$ die beiden (einzigen) Lösungen.

h) Die Abbildung $f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{6, 7, 8, 9, 10\}$ sei injektiv. Ist sie auch surjektiv?

Lösung: *Ja,* denn falls irgendeine der Zahlen zwischen sechs und zehn nicht im Bild läge, müßte f eine fünfelementige Menge auf höchstens vier Elemente abbilden. Dann müßten aber mindestens zwei der Zahlen von eins bis fünf dasselbe Bild haben, im Widerspruch zur Injektivität.

i) Welche der hier definierten Folgen ist konvergent, und wohin konvergiert sie gegebenenfalls? Welche der Folgen ist monoton?

$$u_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}, \quad v_n = \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}{n}, \quad w_n = i^n, \quad x_n = 2^n, \quad y_n = \frac{(-2)^n}{3^n}, \quad z_n = (-5)^n$$

Lösung:
$$u_n = \frac{n^2-1}{n^2+1} = \frac{(n^2+1)-2}{n^2+1} = 1 - \frac{2}{n^2+1}$$
konvergiert gegen 1, denn da n^2+1 unbegrenzt wächst, ist die Folge der Zahlen $2/(n^2+1)$ eine monoton fallende Nullfolge. Damit ist auch klar, daß $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst.

Die Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$v_n = \frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\left(\sqrt[3]{n}\right)^2}$$
ist als Summe zweier monoton fallender Nullfolgen selbst eine monoton fallende Nullfolge.

Die Folge der $w_n = i^n$ nimmt periodisch die Werte $i, -1, -i$ und 1 an, ist also unbestimmt divergent; von Monotonie können wir bei nichtreellen Folgen nicht reden.

$x_n = 2^n$ wächst unbegrenzt und monoton, definiert also eine bestimmt gegen $+\infty$ divergente monoton wachsende Folge.
$$y_n \frac{(-2)^n}{3^n} = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$
definiert eine Nullfolge, denn der Betrag von $-2/3$ ist echt kleiner als eins. Wegen der ständigen Vorzeichenwechsel ist sie weder monoton wachsend noch monoton fallend.

$z_n = (-5)^n$ schließlich wächst zwar betragsmäßig unbeschränkt, wechselt aber ständig sein Vorzeichen. Somit ist die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbestimmt divergent und nicht monoton.

j) *Richtig oder falsch:* Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_1 = -1$ und $x_{n+1} = \max(x_n, \sin x_n)$ konvergiert.

Lösung: *Richtig,* denn nach Konstruktion ist sie monoton wachsend, und da $\sin x \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist sie nach oben beschränkt; also konvergiert sie nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS.

k) Bestimmen Sie, soweit vorhanden, Infimum und Supremum der Mengen
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 3 \leq 0\right\} \quad \text{und} \quad B = \left\{3 + 4n^{-2} \mid n \in \mathbb{N}\right\}!$$

Lösung: $x^2+2x-3 = (x+1)^2-4$ ist genau dann kleiner oder gleich Null, wenn $(x+1)^2 \leq 4$ ist, also $-3 \leq x \leq 1$. Somit ist $\inf A = -3$ und $\sup A = 1$.

Die Folge der Zahlen $3 + 4n^{-2} = 3 + \frac{4}{n^2}$ ist monoton fallend und konvergiert gegen drei; somit ist $\inf B = 3$ und $\sup B$ ist das maximale Folgenglied, also das für $n = 1$, also $3 + 4 = 7$.

l) Auf welcher maximaler Teilmenge von $\mathbb{R}$ sind die durch die folgenden Ausdrücke gegebenen Funktionen definiert? Wo sind sie stetig, wo differenzierbar?
$$f(x) = \sin|x|\,, \quad g(x) = x^2 - [x], \quad h(x) = x\cdot|x|\,, \quad j(x) = \frac{e^x}{e^x-1}, \quad k(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$$

Lösung: $f(x) = \sin|x|$ ist offensichtlich auf ganz $\mathbb{R}$ definiert; da sowohl der Sinus als auch die Betragsfunktion stetig auf ganz $\mathbb{R}$ sind, gilt dies auch für f. Für $x = 0$ ist die Funktion allerdings nicht differenzierbar, denn
$$\lim_{h\searrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\searrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1, \quad \text{aber} \quad \lim_{h\nearrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\nearrow 0} \frac{\sin(-h)}{h} = -1\,.$$

Für alle anderen $x \in \mathbb{R}$ stimmt f entweder mit $\sin x$ oder $\sin(-x)$ überein und ist daher, wie diese Funktionen, differenzierbar.

Auch $g(x)$ ist offensichtlich für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, macht aber an allen ganzzahligen Stellen einen Sprung um -1 und ist daher nur auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig. Dort ist die Funktion auch differenzierbar mit Ableitung $g'(x) = 2x$.

$h(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert; in der Umgebung eines Punktes $x \neq 0$ stimmt es mit einer der beiden stetigen und differenzierbaren Funktionen $x \mapsto x^2$ oder $x \mapsto -x^2$ überein und ist daher auch selbst stetig und differenzierbar. Für $x = 0$ nehmen sowohl x^2 als auch $-x^2$ den Wert Null an, genauso ihre Ableitungen $2x$ und $-2x$. Somit ist h auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar.

$j(x)$ ist für $x = 0$ nicht definiert, da der Nenner dort verschwindet. Für alle anderen $x \in \mathbb{R}$ ist $j(x)$ nicht nur definiert, sondern als Hintereinanderausführung von differenzierbaren Funktionen und Grundrechenarten auch stetig und differenzierbar.

Bei $k(x)$ ist der Zähler $\sqrt{x}$ nur für $x \geq 0$ definiert; der Nenner verschwindet für $x = \pm 1$. Somit ist die Funktion definiert für alle $x \geq 0$ mit $x \neq 1$. Für $x > 0$ und $x \neq 1$ ist sie als Hintereinanderausführung von differenzierbaren Funktionen und Grundrechenarten auch stetig und differenzierbar.

m) Zeigen Sie, daß das Polynom $f(x) = x^3 - 3x + 1$ zwischen $x = -2$ und $x = +2$ mindestens eine Nullstelle hat!

Lösung: $f(-2) = -2^3 + 3 \cdot 2 + 1 = -1$ ist negativ und $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 1 = 3$ positiv; nach dem Zwischenwertsatz muß es daher im Intervall $(-2, 2)$ mindestens eine Nullstelle geben,

n) Tatsächlich hat $f(x) = x^3 - 3x + 1$ zwischen $x = -2$ und $x = +2$ sogar drei Nullstellen. Finden Sie Intervalle, in denen jeweils genau eine dieser Nullstellen liegt!

Lösung: $f(-2) = -1, f(-1) = 3, f(0) = 1, f(1) = -1$ und $f(2) = 3$. Somit liegen die drei Nullstellen in den Intervallen $(-2, -1)$, $(0, 1)$ und $(1, 2)$.

o) Wo hat diese Funktion ihre lokalen Maxima, wo die Minima?

Lösung: $f'(x) = 3x^2 - 3$ verschwindet für $x = \pm 1$, etwaige lokale Extrema können also nur dort sein. Da die Funktion von $-\infty$ kommt und nach $+\infty$ geht, liegt bei $f(-1) = 3$ das lokale Maximum und bei $f(1) = -1$ das lokale Minimum.

p) Wo ist die Funktion monoton wachsend, wo monoton fallend?

Lösung: $f'(x) = 3x^2 - 3$ ist für $|x| > 1$ positiv; in diesem Bereich ist die Funktion also monoton wachsend. Für $|x| < 1$ ist $f'(x) < 0$, die Funktion also monoton fallend.

q) Wo ist die Funktion konvex, wo konkav?

Lösung: $f''(x) = 6x$ ist für $x < 0$ negativ, die Funktion also konkav; für $x > 0$ ist sie konvex.

r) *Richtig oder falsch:* Konvergiert die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $x \in \mathbb{R}$, so konvergiert die Folge $(\cos x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\cos x$.

Lösung: *Richtig,* denn der Kosinus ist eine stetige Funktion.

s) Richtig oder falsch: Konvergiert die Folge $(\sin x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $y \in \mathbb{R}$, so konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\sin x = y$.

Lösung: *Falsch,* beispielsweise ist für $x_n = 2n\pi$ die Folge der $\sin x_n$ eine Folge aus lauter Nullen und konvergiert daher gegen Null, wohingegen die Folge der x_n divergiert.

t) Drücken Sie $\sin^3 x$ aus als Linearkombination von Funktionen der Form $\sin ax$ mit $a \in \mathbb{R}$!

Lösung: $\sin^3 x = \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \dfrac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i} = -\dfrac{1}{4}\sin 3x + \dfrac{3}{4}\sin x$

u) Was ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-k}$?

Lösung: Hier handelt es sich um eine geometrische Reihe mit Quotioen $q = e^{-1}$; die Summe ist also

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e}{e-1}\,.$$

v) Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\cos k}{2^k}$?

Lösung: *Ja,* sie konvergiert sogar absolut, denn die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

ist eine konvergente Majorante für die Summe der Beträge.

w) Entscheiden Sie für die folgenden Reihen, ob sie konvergieren, und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert!

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}, \qquad \sum_{k=3}^{\infty} \frac{k}{k^2-2}\,!$$

Lösung: Die erste Reihe ist eine geometrische Reihe mit $q = 1/10$; die Summe ist also

$$\frac{q}{1-q} = \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{10-1} = \frac{1}{9}\,.$$

Bei der zweiten Reihe können wir den Summanden zerlegen:

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} = \frac{(k+1)-(k-1)}{(k+1)(k-1)} = \frac{2}{k^2-1}\,;$$

damit ist

$$\sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{m}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k+1}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{m+1}\frac{1}{k} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right)\,.$$

Dies konvergiert für $m \to \infty$ gegen $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
Bei der dritten Reihe schließlich ist

$$\frac{k}{k^2 - 2} > \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k};$$

da die harmonische Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, divergiert also erst recht die vorgegebene Reihe.

x) Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$f(x) = xe^{\cos x}, \qquad g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} \quad \text{und} \quad h(x) = x^2 \log x - \cos^2 x\,!$$

Lösung: Nach der Produkt- und der Kettenregel ist

$$f'(x) = xe^{\cos x} \cdot (-\sin x) + e^{\cos x} = e^{\cos x}(1 - x \sin x)\,.$$

Die Ableitung von g läßt sich nach der Quotientenregel berechnen:

$$g'(x) = \frac{(x^2 - 1) \cdot 2x - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}\,.$$

Aus der Produkt- und der Kettenregel folgt schließlich

$$h'(x) = \frac{x^2}{x} + 2x \log x - 2 \cos x \cdot (-\sin x) = x(1 + 2 \log x) + 2 \sin x \cos x\,.$$

y) Bestimmen Sie die TAYLOR-Reihe von $f(x) = \sin(x^2)$ um den Nullpunkt!

Lösung: Die TAYLOR-Reihe des Sinus ist $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, also ist

$$\sin x^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k+2}}{(2k+1)!}\,.$$

z) Bestimmen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}\,!$$

Lösung: Nach der Regel von DE L'HÔPITAL ist

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2}{3x^2 - 4x + 2} = 3\,.$$

ä) Finden Sie Stammfunktionen für

$$f(x) = x^4 + 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \quad \text{und} \quad g(x) = \cos(3x + 2)\,!$$

Lösung: Die Ableitung von x^n ist nx^{n-1}; für $n \neq -1$ ist daher $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ eine Stammfunktion von x^n. Die Stammfunktion von x^{-1} ist $\log x$. Daher ist

$$\int f(x)\,dx = \frac{x^5}{5} + x^3 + \log x + \frac{1}{x}\,.$$

Da $\sin(3x+2)$ nach der Kettenregel die Ableitung $3\cos(3x+2)$ hat, ist

$$\int \cos(3x+2)\,dx = \frac{\sin(3x+5)}{3} + C\,.$$