Wolfgang K. Seiler
*Tel.* 2515

A5, Zimmer C201

## Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 3. – 5. Dezember 2012

*a)* Drücken Sie $\sin^2 x$ und $\cos^2 x$ aus durch Funktionen der Form $\sin ax$ und $\cos bx$ !

**Lösung:**

$$\sin^2 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2ix}-2+e^{-2ix}}{-4} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$
$$\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2ix}+2+e^{-2ix}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$$

*b)* Drücken Sie $\sin 3x$ aus als Polynom in $\sin x$ und $\cos x$ !

**Lösung:** $\sin 3x$ ist der Imaginärteil von

$$e^{3ix} = \left(e^{ix}\right)^3 = (\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x + 3i\cos^2 x\, \sin x - 3\cos x\, \sin^2 x - i\sin^3 x\,.$$

Somit ist $\sin 3x = 3\cos^2 x\, \sin x - \sin^3 x$. Mit der Beziehung $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ läßt sich das noch vereinfachen zu $\sin 3x = 3(1-\sin^2 x)\, \sin x - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ .

*c)* Drücken Sie $\cos 3x$ aus als Polynom nur in $\cos x$ !

**Lösung:** Nach der vorigen Aufgabe ist

$$\cos 3x = \mathfrak{Re}\, e^{3ix} = \cos^3 x - 3\cos x\, \sin^2 x = \cos^3 x - 3\cos x\,(1-\cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x\,.$$

*d)* Zeigen Sie: Für jeden Winkel $\varphi$ genügt $z = \cos\frac{\varphi}{3}$ der kubischen Gleichung

$$4z^3 - 3z = \cos\varphi\,!$$

**Lösung:** Mit $x = \frac{\varphi}{3}$ ist nach der vorigen Lösung

$$\cos\varphi = \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = 4z^3 - 3z\,.$$

*e)* Zeigen Sie: Im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist die Sinusfunktion streng monoton wachsend!

**Lösung:** Ein Punkt $P$, dessen Radius $\overline{OP}$ mit der $x$-Achse einen Winkel $\varphi$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ einschließt, hat eine positive $x$-Koordinate, also ist $\cos\varphi > 0$. Da der Kosinus die Ableitung des Sinus ist, folgt dessen strenge Monotonie.

*f)* Der Arkussinus $\arcsin x$ sei die Umkehrfunktion der Einschränkung des Sinus auf das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ Zeigen Sie, daß er für alle $x \in [-1, 1]$ erklärt ist, und berechnen Sie seine Ableitung!

**Lösung:** Die Sinusfunktion bildet das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ injektiv ab auf $[-1, 1]$; es gibt somit eine Umkehrfunktion. Wegen der Monotonie werden auch die entsprechenden offenen Intervalle aufeinander abgebildet, und nach der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion ist deren Ableitung im Punkt $y = \sin x$

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,,$$

da $\cos x$ im fraglichen Intervall nicht negativ wird.

*g)* Was ist $i^{-i}$?

**Lösung:** Da $i$ auf der imaginären Achse liegt, hat es Argument $\pi/2$, also ist $i = e^{\pi i/2}$ und

$$i^{-i} = e^{\pi i/2 \cdot (-i)} = e^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{e^{\pi}}\,.$$

(BENJAMIN PEIRCE (1809–1880) sagte in seinen Vorlesungen in Harvard zu dieser Formel: *Gentlemen, we have not the slightest idea what this equation means, but we may be sure that it means something very important.* Bevor wir zuviel in dieses Ergebnis hineininterpretieren, sollten wir allerdings bedenken, daß wir auch $i = e^{5\pi i/2}$ schreiben können und dann das Ergebnis $i^{-1} = e^{5\pi/2}$ bekommen *usw.* Potenzen mit komplexer Basis und nichtganzen Exponenten sind also nicht eindeutig bestimmt.)

*h)* Finden Sie eine komplexe Zahl $z$, mit $z^{12} = 1$, aber $z^n \neq 1$ für alle natürlichen Zahlen $n < 12$!

**Lösung:** Offensichtlich muß $z$ den Betrag eins haben, läßt sich also darstellen in der Form $z = e^{i\varphi}$. Dann ist $1 = z^{12} = e^{12i\varphi}$, also muß $12\varphi$ ein Vielfaches von $2\pi$ sein, d.h.

$$\varphi = \frac{2k\pi}{12} = \frac{k\pi}{6} \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Speziell im Falle $k = 1$ ist

$$\left(e^{\pi i/6}\right)^n = e^{(n/6)\pi i} \neq 1 \quad \text{für } n = 1, \ldots, 11\,,$$

also ist $z = e^{\pi i/6}$ eine Lösung.

*i)* Wie viele verschiedene Lösungen hat die vorige Aufgabe?

**Lösung:** Wie wir gesehen haben, läßt sich jedes $z$ mit $z^{12} = 1$ schreiben als $z = e^{k\pi i/6}$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$. Wenn wir zu $k$ ein Vielfaches von zwölf addieren, ist

$$e^{(k+12m)\pi i/6} = e^{k\pi i/16 + 2m\pi i} = e^{k\pi i/6}\,;$$

daher gibt es nur die zwölf verschiedenen Werte $z_k = e^{k\pi i/6}$ mit $k = 0, \ldots, 11$. Für gerades $k$ ist $6k\pi/6 = k\pi$ ein Vielfaches von $2\pi$, also ist $z_k^6 = 1$. Für durch drei teilbares $k$ ist entsprechend $z_k^4 = 1$. Damit kommen höchstens die Werte $k = 1, 5, 7$ und $11$ in Frage. $z_1$ ist eine Lösung, und damit auch $z_{11} = 1/z_1$. Das kleinste durch 12 teilbare Vielfache von 5 ist 60, also ist auch $z_5$ eine Lösung und damit auch $z_7 = 1/z_5$. Es gibt also vier verschiedene Lösungen.

*j)* Drücken Sie die Funktionen $\sin kx \cos \ell x$ für $k, \ell \in \mathbb{R}$ aus als Linearkombination von Funktionen der Form $\sin rx$!

**Lösung:** Nach den EULERschen Formeln ist

$$\begin{aligned}\sin kx \cos \ell x &= \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \cdot \frac{e^{i\ell x} + e^{-i\ell x}}{2} = \frac{e^{i(k+\ell)x} - e^{-i(k+\ell)x} + e^{i(k-\ell)x} - e^{-i(k-\ell)x}}{4i} \\ &= \frac{\sin(k+\ell)x + \sin(k-\ell)x}{2}\,.\end{aligned}$$

*k)* Eine Boeing 727 braucht zum Abheben eine Geschwindigkeit von mindestens 200 Meilen pro Stunde; sie kann aus dem Stand innerhalb von 30 Sekunden auf diese Geschwindigkeit beschleunigen. Falls Sie von einer konstanten Beschleunigung (d.h. einer linear ansteigenden Geschwindigkeit) ausgehen: Wie lange (in Meilen) muß die Startbahn mindestens sein?

**Lösung:** 200 Meilen pro Stunde sind 200 Meilen pro 3600 Sekunden, also eine Meile pro 18 Sekunden. Wenn die Geschwindigkeit $v(t)$ innerhalb von 30 Sekunden von Null auch 1/18 Meile pro Sekunde ansteigt, ist nach $t$ Sekunden $v(t) = \dfrac{t}{30 \cdot 18}$ Meilen pro Sekunde. Der innerhalb von 30 Sekunden zurückgelegte Weg ist somit

$$\int_0^{30} \frac{t}{30 \cdot 18}\, dt = \left. \frac{t^2}{2 \cdot 30 \cdot 18} \right|_0^{30} = \frac{30^2}{2 \cdot 30 \cdot 18} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \text{ Meilen .}$$

Die Startbahn muß also mindestens eine Länge von 5/6 Meilen (plus Sicherheitszuschlag) haben.

*l)* Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^x u\, du$ als Grenzwert der Fläche unter geeigneten Treppenfunktionen!

**Lösung:** Unterteilen wir das Intervall $[0, x]$ in $n$ Teilintervalle der Länge $x/n$ und werten die Funktion jeweils am linken Intervallende aus, erhalten wir als Fläche unterhalb dieser Treppenfunktion

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{kx}{n} \cdot \frac{x}{n} = \frac{x^2}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{x^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \frac{x^2}{2} \frac{n-1}{n} \frac{n}{n} = \frac{x^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) .$$

Für $n \to \infty$ geht das gegen $\dfrac{x^2}{2}$.

*m)* Bestimmen Sie alle Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1\, dx$!

**Lösung:** Da $x^n$ die Ableitung $nx^{n-1}$ hat, ist $x^n/n$ eine Stammfunktion von $x^{n-1}$ (falls $n \neq 0$), also ist

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + x^2 + x + C$$

mit einer beliebigen Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

*n)* Für welche $F$ ist $F'(x) = \cos(3x + 5)$?

**Lösung:** Wir suchen eine Funktion, deren Ableitung $\cos(3x + 5)$ ist. Die Ableitung von $\sin(3x + 5)$ ist $3\cos(3x + 5)$; wegen der Linearität von Differentiation und Integration ist also

$$\int \cos(3x + 5)\, dx = \frac{\sin(3x + 5)}{3} + C .$$