WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 26–28. November 2012

a) Berechnen Sie die TAYLOR-Reihe der Funktion $f(x) = x^3$ um $x = 1$!

Lösung: $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ und $f'''(x) = 6$; alle höheren Ableitungen verschwinden identisch. Somit hat die TAYLOR-Reihe nur vier Summanden:

$$f(1+h) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}h + \frac{f''(1)}{2!}h^2 + \frac{f'''(1)}{3!}h^3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3 = (1+h)^3 .$$

b) Bestimmen Sie die TAYLOR-Reihe von $f(x) = e^{-x^2}$ um den Nullpunkt!

Lösung: Für alle $u \in \mathbb{R}$ ist $e^u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!}$; also ist

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} .$$

c) Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom fünften Grades von $f(x) = \sqrt{x}$ um $x = 1$!

Lösung: Zunächst müssen wir die Ableitungen von f berechnen; dazu arbeiten wir am besten mit der Darstellung $f(x) = x^{1/2}$:

$$f'(x) = \frac{x^{-1/2}}{2}, \quad f''(x) = -\frac{x^{-3/2}}{4}, \quad f'''(x) = \frac{3x^{-5/2}}{8},$$
$$f^{(4)}(x) = -\frac{15x^{-7/2}}{16}, \quad f^{(5)}(x) = \frac{105x^{-9/2}}{32} .$$

An der Stelle $x = 1$ sind alle x-Potenzen gleich eins; außerdem müssen die Ableitungen noch dividiert werden durch die Fakultäten

$$1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24 \quad \text{und} \quad 5! = 120 ,$$

also ist

$$T_{f,1,5}(h) = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{16} - \frac{5h^4}{128} + \frac{7h^5}{256} .$$

d) Ab welchem $n \in \mathbb{N}$ können Sie sicher sein, daß gilt

$$\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| < \frac{1}{100} \; ?$$

Lösung: Nach dem Satz über die TAYLOR-Entwicklung ist

$$e = e^1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + e^{\eta} \frac{1}{(n+1)!}$$

mit einer reellen Zahl $\eta \in (0, 1)$. Wegen der Monotonie der Exponentialfunktion ist hier $e^{\eta} < e < 3$. Wir müssen daher ein n finden mit $3/(n+1)! < 1/100$ oder $(n+1)! > 300$. Da $5! = 120$ und $6! = 720$ ist, genügt $n = 5$.

e) Zeigen Sie durch Abschätzung mit einer geometrischen Reihe, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} < \frac{1}{n}\,!$$

Lösung: Nach der Summenformel für geometrische Reihen ist

$$n!\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+k)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdots(n+k)} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}\,.$$

f) Liefert das bei *d)* ein besseres Ergebnis?

Lösung: Nach der gerade bewiesenen Ungleichung ist

$$\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n \cdot n!}\,.$$

Für $n = 4$ ist $4 \cdot 4! = 4 \cdot 24 = 96$, was leider nicht ganz ausreicht. Tatsächlich approximiert

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{163}{60} = 2{,}708\overline{3}$$

e sogar deutlich besser, aber das können wir mit unseren *a priori*-Abschätzungen nicht zeigen.

g) Schreiben Sie $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} = \frac{z_n}{n!}$ als Bruch mit Nenner $n!$, und zeigen Sie mit Hilfe der vorigen Aufgabe, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\dfrac{z_n}{n!} < e < \dfrac{z_n + 1}{n!}$

Lösung: Für jede natürliche Zahl n ist

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,.$$

Die linke Seite läßt sich als Bruch $z_n/n!$ schreiben. Nach der vorigen Aufgabe ist

$$e - \frac{z_n}{n!} < \frac{1}{n!}, \quad \text{d.h.} \quad \frac{z_n}{n!} < e < \frac{z_n+1}{n!}\,.$$

h) Folgern Sie, daß e eine irrationale Zahl ist!

Lösung: Wie wir gerade gesehen haben, ist für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{z_n}{n!} < e < \frac{z_n+1}{n!}\,.$$

Wäre $e = p/q$ eine rationale Zahl, so gäbe es eine natürliche Zahl n, für die q Teiler von $n!$ ist, z.B. q selbst. Damit ließe sich e als Bruch mit Nenner $n!$ schreiben, was nach obiger Ungleichung unmöglich ist.

i) Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch die Bedingungen

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 2 \quad \text{und} \quad a_k = 2a_{k-1} + a_{k-2}\,.$$

Finden Sie eine geschlossene Formel für a_k!

Lösung: Wir betrachten, zunächst noch ohne jede Berücksichtigung von Konvergenzproblemen, die Potenzreihe

$$R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \,.$$

Da a_0 verschwindet, ist

$$xR(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1} x^k$$

und

$$x^2 R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^k \,.$$

Somit ist

$$2xR(x) + x^2 R(x) = \sum_{k=2}^{\infty} (2a_{k-1} + a_{k-2}) x^k = \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$$

und damit $R(x) = a_0 + a_1 x + 2xR(x) + x^2 R(x) = 2x + (2x + x^2)R(x)$.
Dies können wir nach $R(x)$ auflösen und erhalten die Gleichung

$$R(x) = \frac{2x}{1 - 2x - x^2} \,.$$

Da die höheren Ableitung dieser Funktion sicherlich nicht angenehm zu berechnen sind, wollen wir die TAYLOR-Reihe besser über die Summenformel der geometrischen Reihe berechnen. Die Nullstellen des Nenners sind die des Polynoms $x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 2$, also $x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{2}$ und $1 - 2x - x^2 = -(x - x_1)(x - x_2) = -(x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2})$. Für die Anwendung der Summenformel der geometrischen Reihe sind die Faktoren in dieser Form noch nicht ganz geeignet, denn dort haben wir einen Nenner der Form $1 - q$. Faktoren dieser Form können wir erreichen, indem den ersten Faktor durch x_1 und den zweiten durch x_2 dividieren: $x^2 + 2x - 1 = (x - x_1)(x - x_2) = x_1 x_2 \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right)$.
Multipliziert man $(x - x_1)(x - x_2)$ aus und vergleicht mit $x^2 + 2x - 1$, sieht man, daß $x_1 x_2 = -1$ ist (was man natürlich auch direkt nachrechnen kann); daher ist $1/x_1 = -x_2$ und $1/x_2 = -x_1$, d.h.

$$x_1 x_2 \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right) = -(1 + x_2 x)(1 + x_1 x)$$

und

$$\begin{aligned} 1 - 2x - x^2 &= (1 + x_2 x)(1 + x_1 x) = \big(1 + (-1 - \sqrt{2})x\big)\big(1 + (-1 + \sqrt{2})x\big) \\ &= \big(1 - (1 + \sqrt{2})x\big)\big(1 - (1 - \sqrt{2})x\big) \,. \end{aligned}$$

Wir versuchen daher, $R(x)$ darzustellen in der Form

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{2x}{1 - 2x - x^2} = \frac{c}{1 - (1 + \sqrt{2})x} + \frac{d}{1 - (1 - \sqrt{2})x} \\ &= \frac{c\big(1 - (1 - \sqrt{2})x\big) + d\big(1 - (1 + \sqrt{2})x\big)}{1 - 2x - x^2} = \frac{(c + d) - \big(c(1 - \sqrt{2}) + d(1 + \sqrt{2})\big)x}{1 - 2x - x^2} \,. \end{aligned}$$

Damit der Zähler zu $2x$ wird, muß $c + d$ verschwinden und der Koeffizient vor x muß -2 sein, d.h. $d = -c$ und

$$c(1 - \sqrt{2}) + d(1 + \sqrt{2}) = c(1 - \sqrt{2}) - c(1 + \sqrt{2}) = -2c\sqrt{2} = -2 \,.$$

Also ist $c = 1/\sqrt{2}$ und $d = -1/\sqrt{2}$. Nach der Summenformel für die geometrische Reihe ist damit für alle x mit $|x| < 1/(1 + \sqrt{2})$

$$\frac{2x}{1 - 2x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (1 + \sqrt{2})^k x^k - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \sqrt{2})^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 + \sqrt{2})^k - (1 - \sqrt{2})^k}{\sqrt{2}} x^k \,.$$

Somit sollte

$$a_k = \frac{(1+\sqrt{2})^k - (1-\sqrt{2})^k}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2})^k - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2})^k$$

sein, und in der Tat ist dies für $k=0$ die Null. Für $k=1$ ist

$$\frac{(1+\sqrt{2})^1 - (1-\sqrt{2})^1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\,,$$

wie gewünscht. Um zu zeigen, daß obige Formel die Lösung ist, müssen wir nur noch überprüfen, ob für $k \geq 2$ gilt $a_k = 2a_{k-1} + a_{k-2}$. Dazu reicht es, wenn wir die entsprechende Formel für $(1+\sqrt{2})^k$ und für $(1-\sqrt{2})^k$ nachrechnen, denn wenn sie für diese beiden Terme gilt, dann auch für jede Linearkombination davon. Für $k \geq 2$ ist

$$\begin{aligned}(1\pm\sqrt{2})^k &= (1\pm\sqrt{2})^{k-2}(1\pm\sqrt{2})^2 = (1\pm\sqrt{2})^{k-2}(1\pm 2\sqrt{2}+2)\\ &= (1\pm\sqrt{2})^{k-2}\big(1+2(1\pm\sqrt{2})\big) = (1\pm\sqrt{2})^{k-2} + 2(1\pm\sqrt{2})^{k-1}\,,\end{aligned}$$

wie gewünscht. Damit ist auch $a_k = 2a_{k-1} + a_{k-2}$

Tatsächlich kann man den Ausdruck noch etwas vereinfachen, denn $\left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1 < \frac{1}{2}$, so daß a_k einfach die nächste ganze Zahl zu $(1+\sqrt{2})^k/\sqrt{2}$ ist.

j) Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch die Bedingungen

$$a_0 = 3, \quad a_1 = 5 \quad \text{und} \quad a_k = a_{k-1} - a_{k-2}\,.$$

Was ist $a_{1\,000\,000}$?

Lösung: Wir betrachten, zunächst noch ohne jede Berücksichtigung von Konvergenzproblemen, die Potenzreihe

$$R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\,.$$

Zunächst ist

$$xR(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^k = 3x + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1}x^k$$

und

$$x^2R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2}x^k\,.$$

Somit ist

$$xR(x) - x^2R(x) = 3x + \sum_{k=2}^{\infty}(a_{k-1}-a_{k-2})x^k = 3x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$$

und damit $R(x) = 3 + 5x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = 3 + 2x + (x-x^2)R(x)$.
Dies können wir nach $R(x)$ auflösen und erhalten die Gleichung

$$R(x) = \frac{2x+3}{1-x+x^2}\,.$$

Der Nenner $x^2 - x + 1 = (x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, hat die Nullstellen $x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$. Da der konstante Term 1 das Produkt der beiden Nullstellen ist, folgt $x_1x_2 = 1$. (Studenten mit gutem Gedächtnis erinnern sich vielleicht daran, daß x_1 und x_2 die beiden komplexen Lösungen der Gleichung $x^3 = -1$ sind.) Damit läßt sich der Nenner von $R(x)$ schreiben als

$$\begin{aligned}1-2x-x^2 = (x-x_1)(x-x_2) &= \frac{x-x_1}{x_1}\frac{x-x_2}{x_2} = \left(\frac{x}{x_1}-1\right)\left(\frac{x}{x_2}-1\right)\\ &= \left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right) = \left(1-\frac{2x}{1+\sqrt{-3}}\right)\left(1-\frac{2x}{1-\sqrt{-3}}\right)\\ &= \left(1-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}x\right)\left(1-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}x\right)\,.\end{aligned}$$

Wir versuchen daher, $R(x)$ darzustellen in der Form

$$R(x) = \frac{2x+3}{x^2-x+1} = \frac{c}{1-\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})x} + \frac{d}{1-\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3})x}\,.$$

Nach der Summenformel für die geometrische Reihe ist dann

$$\frac{2x+3}{x^2-x+1} = c\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^k x^k + d\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^k x^k\,.$$

Somit sollte

$$a_k = c\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^k + d\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^k$$

sein.

Der Inhalt der Klammern, die potenziert werden, ist in beiden Fällen eine Zahl, deren dritte Potenz -1 ist; falls diese Formel stimmt, ist also $a_{k+3} = -a_k$ und $a_{k+6} = a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dies können wir leicht nachprüfen, wenn wir a_k für kleiner Werte von k nach der Rekursionsformel berechnen: $a_2 = a_1 - a_0 = 5-3 = 2$, $a_3 = a_2 - a_1 = 2-5 = -3 = -a_0$ und $a_4 = a_3 - a_2 = -3-2 = -5 = -a_1$. Wegen der Linearität der Rekursion ist damit $a_{k+3} = -a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Da $1\,000\,000 : 6 = 166\,666$ Rest 4 ist, folgt $a_{1\,000\,000} = a_4 = -a_1 = -5$.

k) Die Funktion f erfülle die Gleichung $f''(x) = -100f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$; außerdem sei $f''(0) = 1000$ und $f'''(0) = 0$. Was wissen Sie über $f(x)$?

Lösung: Wegen der Beziehung $f''(x) = -100f(x)$ muß es nach dem Satz aus der Vorlesung reelle Zahlen a, b geben, so daß $f(x) = a\sin 10x + b\cos 10x$ ist. Dann ist

$$f'(x) = 10a\cos 10x - 10b\sin 10x, \qquad f''(x) = -100a\sin 10x - 100b\cos 10x$$

und $f'''(x) = -1000a\cos 10x + 1000b\sin 10x$.

Die Bedingungen $f''(0) = 1000$ und $f'''(0) = 0$ bedeuten also, daß $-100b = 1000$ und $-1000a = 0$ sein muß. Somit ist $f(x) = -10\cos 10x$.