WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 26–28. November 2012

a) Berechnen Sie die TAYLOR-Reihe der Funktion $f(x) = x^3$ um $x = 1$!

b) Bestimmen Sie die TAYLOR-Reihe von $f(x) = e^{-x^2}$ um den Nullpunkt!

c) Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom fünften Grades von $f(x) = \sqrt{x}$ um $x = 1$!

d) Ab welchem $n \in \mathbb{N}$ können Sie sicher sein, daß gilt

$$\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| < \frac{1}{100}\ ?$$

e) Zeigen Sie durch Abschätzung mit einer geometrischen Reihe, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} < \frac{1}{n}\ !$$

f) Liefert das bei *d)* ein besseres Ergebnis?

g) Schreiben Sie $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} = \frac{z_n}{n!}$ als Bruch mit Nenner $n!$, und zeigen Sie mit Hilfe der vorigen Aufgabe, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\frac{z_n}{n!} < e < \frac{z_n + 1}{n!}$

h) Folgern Sie, daß e eine irrationale Zahl ist!

i) Die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch die Bedingungen

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 2 \quad \text{und} \quad a_k = 2a_{k-1} + a_{k-2}\,.$$

Finden Sie eine geschlossene Formel für a_k!

j) Die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch die Bedingungen

$$a_0 = 3, \quad a_1 = 5 \quad \text{und} \quad a_k = a_{k-1} - a_{k-2}\,.$$

Was ist $a_{1\,000\,000}$?

k) Die Funktion f erfülle die Gleichung $f''(x) = -100f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$; außerdem sei $f''(0) = 1000$ und $f'''(0) = 0$. Was wissen Sie über $f(x)$?