Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 19–21. November 2012

a) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert!

Lösung: Für $x = 0$ konvergiert die Summe gegen Null; für $x \neq 0$ können wir beispielsweise versuchen, das Quotientenkriterium anzuwenden: Der Betrag des Quotienten zweier aufeinanderfolgender Summanden ist

$$\left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \Big/ \frac{x^k}{k!} \right| = \left| \frac{x^{k+1} \cdot k!}{(k+1)! \cdot x^k} \right| = \left| \frac{x}{k+1} \right| .$$

Die ist für jedes x eine Nullfolge; also konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium absolut.

b) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2 - \frac{1}{k}} \right)^k$ konvergiert!

Lösung: Hier könnte das Wurzelkriterium nützlich sein: Die k-te Wurzel des k-ten Summanden ist $\frac{1}{2 - \frac{1}{k}}$, und da dies für $k \to \infty$ gegen $\frac{1}{2}$ konvergiert, folgt aus dem Wurzelkriterium die (absolute) Konvergenz der Reihe.

c) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = x^5 + x + 1$ auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist!

Lösung: $f'(x) = 5x^4 + 1 \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und eine Funktion mit positiver erster Ableitung ist streng monoton wachsend.

d) Welche Ableitung hat die Umkehrfunktion g von f im Punkt $f(2) = 35$?

Lösung: $g(35) = 2$ und $g'(35) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{5 \cdot 2^4 + 1} = \frac{1}{81}$.

e) Wo hat g lokale Maxima und Minima?

Lösung: Nirgends, denn $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ kann nirgends verschwinden.

f) Wo ist f konvex, wo konkav?

Lösung: $f''(x) = 20x^3$ ist negativ für $x < 0$ und positiv für $x > 0$; somit ist x konkav auf $(-\infty, 0)$ und konvex auf $(0, \infty)$.

g) Ist die Logarithmusfunktion konvex oder konkav auf $(0, \infty)$?

Lösung: Die Ableitung von $\log x$ ist $1/x$, die Ableitung davon $-1/x^2$, was überall negativ ist. Somit ist die Logarithmusfunktion konkav.

h) Wie sieht es aus mit der Exponentialfunktion?

Lösung: Da diese auch gleich ihrer zweiten Ableitung ist und außerdem nur positive Werte annimmt, ist sie konvex über ganz $\mathbb{R}$.

i) Was ist $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 - x^3 + x^2 - 1}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}$?

Lösung: Für $x = 1$ verschwinden sowohl der Zähler als auch der Nenner des Bruchs; nach der Regel von DE L'HÔPITAL ist daher

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - x^3 + x^2 - 1}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{4x^3 - 3x^2 + 2x}{5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1} = \frac{3}{3} = 1\,.$$

j) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$!

Lösung: Beweis durch vollständige Induktion: Für $n = 1$ ist nach der Regel von DE L'HÔPITAL

$$\lim_{x\to\infty} x e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0\,,$$

denn e^x wächst unbeschränkt für $x \to \infty$.

Ist die Behauptung für ein festes n bewiesen, so können wir den Grenzwert für $n+1$ nach DE L'HÔPITAL berechnen als

$$\lim_{x\to\infty} x^{n+1} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n+1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(n+1)x^n}{e^x} = (n+1) \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

nach Induktionsannahme. Somit gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

k) Was ist $\lim\limits_{n\to\infty} x^n e^{-x}$?

Lösung: Ist $|x| < 1$, so ist die Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge; da e^x eine von n unabhängige reelle Zahl ist, gilt dasselbe für die Folge der $x^n e^x$; der gesuchte Grenzwert verschwindet also. Für $x = 1$ ist $x^n e^{-x} = e^{-1}$ für alle n, und damit konvergiert die Folge auch gegen e^{-1}. Für $x = -1$ alterniert die Folge zwischen e und $-e$, ist also unbestimmt divergent. Für $x > 1$ divergiert die Folge bestimmt gegen $+\infty$, für $x < -1$ divergiert sie unbestimmt: Die Folgenglieder werden betragsmäßig immer größer, alternieren aber beim Vorzeichen.

l) Zeigen Sie: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $M_n \in \mathbb{R}$, so daß $e^x > x^n$ für alle $x > M_n$, und für jedes $x > 1$ aus $\mathbb{R}$ gibt es ein $N_x \in \mathbb{N}$, so daß $e^x < x^n$ für alle $n \geq N_x$.

Lösung: Da $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$ ist, gibt es insbesondere für $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{R}$, so daß $x^n e^{-x} < \varepsilon = 1$ ist für alle $x > N$, also auch $x^n < e^x$. Mit $M_n = N$ gilt also die erste Behauptung.

In der zweiten behaupteten Ungleichung $e^x < x^n$ steht rechts eine von n unabhängige reelle Zahl. Da die Logarithmusfunktion auf den positiven reellen Zahlen streng monoton wächst, gilt die Ungleichung die Ungleichung genau dann, wenn $\log e^x = x$ kleiner ist $\log x^n = n \log x$. Da wir $x > 1$ vorausgesetzt haben, ist $\log x > 0$; daher ist $n \log x < x$ genau dann, wenn $n > x/\log x$ ist. Somit gilt die Behauptung mit jeder natürliche Zahl $N_x > x/\log x$.

m) Was ist $\lim\limits_{x\searrow 0} \sqrt{x} \log x$?

Lösung: Nach der Regel von DE L'HÔPITAL ist

$$\lim_{x\searrow 0} \sqrt{x} \log x = \lim_{x\searrow 0} \frac{\log x}{x^{-1/2}} = \lim_{x\searrow 0} \frac{1/x}{-(1/2)x^{-3/2}} = \lim_{x\searrow 0} -2\sqrt{x} = 0\,.$$

n) Zeigen Sie: Die n-te Ableitung von x^n ist $n!$.

Lösung: Beweis durch vollständige Induktion: Für $n = 1$ ist zu zeigen, daß die Ableitung von $f(x) = x$ gleich eins ist; das stimmt offensichtlich.

Wenn wir für ein festes n wissen, daß die n-te Ableitung von x^n gleich $n!$ ist, können wir die $(n+1)$-te Ableitung von $f(x) = x^{n+1}$ berechnen als die n-te Ableitung von $f'(x) = (n+1)x^n$, und das ist nach Induktionsannahme $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$.

o) Was ist die n-te Ableitung von $\sinh x$?

Lösung: Die Ableitung des *Sinus hyperbolicus* oder der *Cosinus hyperbolicus,* der wiederum den *Sinus hyperbolicus* als Ableitung hat, und so weiter. für gerade n erhalten wir somit $\sinh x$ als n-te Ableitung, für ungerade n dagegen $\cosh x$.