WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 12–14. November 2012

a) Richtig oder falsch: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$ ist differenzierbar in allen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$.

Lösung: *Richtig:* In der Umgebung eines Punkts $x_0 > 0$ stimmt $f(x)$ mit der Polynomfunktion x^2 überein, in der Umgebung eines Punkte $x_0 < 0$ mit der Polynomfunktion $-x^2$. Bleibt also höchstens der Punkt $x_0 = 0$ als potentielles Problem. In dessen Umgebung ist

$$f(x_0 + h) = \begin{cases} h^2 & \text{falls } h \geq 0 \\ -h^2 & \text{falls } h \leq 0 \end{cases} = f(0) + 0 \cdot h + h \cdot |h| \ .$$

Da die Betragsfunktion stetig ist und für $h = 0$ den Wert null annimmt, ist f auch im Nullpunkt differenzierbar mit Ableitung $f'(0) = 0$.

b) Welche Ableitung hat diese Funktion f?

Lösung: Für $x > 0$ ist $f'(x) = 2x$, für $x < 0$ ist $f'(x) = -2x$ und für $x = 0$ ist $f'(0) = 0$. Kompakt ausgedrückt ist also $f'(x) = 2\,|x|$.

c) Finden Sie für die folgenden Funktionen die größte Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$, auf denen sie definiert sind, und berechnen Sie dort die Ableitung!

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}, \quad g(x) = e^{-x^2}, \quad h(x) = 2^{2^x}, \quad k(x) = \log(4 - x^2), \quad \ell(x) = \log_{10} x\,!$$

Lösung: Die Funktion f ist eine rationale Funktion, also überall dort definiert, wo der Nenner nicht verschwindet. Somit ist $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Die Ableitung dort kann nach der Quotientenregel berechnet werden:

$$f'(x) = \frac{(x^2-1) \cdot 2x - (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = -\frac{4x}{(x^2-1)^2} \ .$$

g ist als Hintereinanderausführung einer Exponentialfunktion und eines Polynoms auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und differenzierbar; die Ableitung errechnet sich nach der Kettenregel zu $g'(x) = -2x\, e^{-x^2}$.

h ist die Hintereinanderausführung der Funktion $x \mapsto 2^x$ mit sich selbst; untersuchen wir also zunächst diese Funktion. $2^x = e^{x \log 2}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und hat nach der Kettenregel (oder laut Vorlesung) die Ableitung $\log 2 \cdot 2^x$. Damit ist auch h auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und hat nach der Kettenregel die Ableitung

$$h'(x) = \log 2 \cdot 2^{2^x} \cdot \log 2 \cdot 2^x = (\log 2)^2\, 2^{2^x} \cdot 2^x \ .$$

k entsteht durch Einsetzen eines Polynoms in die Logarithmusfunktion; da letztere nur für positive Werte von x definiert ist, muß x so gewählt werden, daß $2 - x^2 > 0$ ist, d.h. $D = (-2, 2)$. Für x aus diesem offenen Intervall errechnet sich die Ableitung nach der Kettenregel zu

$$k'(x) = \frac{1}{2-x^2} \cdot (-2x) = \frac{2x}{x^2-2} \ .$$

Der Logarithmus zur Basis 10, schließlich, unterscheidet sich vom natürlichen Logarithmus nur um eine Konstante, ist also wie dieser auf der Menge D aller positiver reeller Zahlen definiert. Da

$$\ell(x) = \log_{10} x = \frac{\log x}{\log 10} \quad \text{ist, folgt} \quad \ell'(x) = \frac{1}{x \log 10} \ .$$

d) Berechnen Sie über die Formel $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$ Näherungswerte für die Zahlen

$$x_1 = \sqrt{10} = \sqrt{9+1}, \quad x_2 = \sqrt[10]{e} = e^{0,1} \quad \text{und} \quad x_3 = \frac{1}{101} = \frac{1}{100+1}\,!$$

Lösung:

$$x_1 = \sqrt{9+1} \approx \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}} = 3\frac{1}{6} = 3,1\overline{6}$$
$$x_2 = e^{0+0,1} \approx e^0 + 0{,}1e^0 = 1{,}1$$
$$x_3 = \frac{1}{100+1} \approx \frac{1}{100} - \frac{1}{100^2} = 0{,}0099$$

Korrekte *bzw.* auf fünf Nachkommastellen gerundete Werte sind

$$x_1 \approx 3{,}16228, \quad x_2 \approx 1{,}10517 \quad \text{und} \quad x_3 = 0{,}\overline{0099}\,.$$

e) Ein Student habe zum Zeitpunkt $t = 0$ der Modulklausur seinen maximalen Wissensstand in Analysis I erreicht. Wenn man davon ausgeht, daß er einen gewissen Bruchteil β davon nie wieder vergißt, erfüllt der Anteil $w(t)$, den er zur Zeit t nach der Prüfung noch beherrscht, nach dem deutschen Psychologen HERMANN EBBINGHAUS (1850–1909) die Gleichung $w'(t) = -\gamma \cdot \big(w(t) - \beta\big)$ mit einem $\gamma \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $w(t)$!

Lösung: Wie wir wissen, muß eine Funktion $y(t)$, für die $y'(t) = ay(t)$ ist, ein Vielfaches der Exponentialfunktion e^{at} sein. Hier haben wir eine ähnliche Gleichung; was stört, ist allerdings der Summand $-\beta$. Nun hat aber eine Konstante die Ableitung null; wenn wir die neue Funktion $y(t) = w(t) - \beta$ betrachten, ist daher

$$y'(t) = w'(t) = -\gamma\, y(t), \quad \text{also} \quad y(t) = Ce^{-\gamma t}\,.$$

Somit ist $w(t) = \beta + Ce^{-\gamma t}$. Dabei muß die Konstante C so bestimmt werden, daß $w(0) = \beta + C = 100\%$ ist, d.h. $C = 1 - \beta$.

f) Für einen speziellen Studenten sei $\beta = 10\%$ und $w(1\,\text{Jahr}) = 60\%$. Welchen Teil seiner Kenntnisse hat er (ohne zusätzliches Lernen) bis zum Wiederholungstermin nach drei Monaten vergessen?

Lösung: In diesem Fall ist C gleich 90% und $w(t) = 0{,}1 + 0{,}9e^{-\gamma t}$. Außerdem ist, wenn wir die Zeit in Jahren messen,

$$w(1) = 0{,}1 + 0{,}9e^{-\gamma} = 0{,}6 \Longrightarrow e^{-\gamma} = \frac{5}{9} \Longrightarrow \gamma = -\ln\frac{5}{9} \approx 0{,}5877866648\,.$$

Mithin ist $w(\frac{1}{2}) = 0{,}1 + 0{,}9e^{\frac{1}{4}\ln\frac{5}{9}} = 0{,}1 + 0{,}9\sqrt[4]{\frac{5}{9}} \approx 0{,}86334$ ungefeähr 86%. Er hat also bis zum Wiederholungstermin knapp 14% des gelernten Stoffs vergessen.

g) Ein Erwachsener atmet etwa 16 Mal pro Minute je einen halben Liter Luft ein; die ausgeatmete Luft enthält 20% weniger Sauerstoff als die eingeatmete. Angenommen, 30 Studenten sitzen in einem nicht gelüfteten Seminarraum von $40\,\text{m}^3$, dessen Luft anfänglich 20% Sauerstoff enthält. Wieviel enthält sie noch nach 90 Minuten?

Lösung: Da die Zahlen ohnehin nur ungefähr stimmen, müssen wir nicht unbedingt mit der hier kleinstmöglichen Zeiteinheit von $1/16$ Minute rechnen, sondern können, ohne großen Einfluß auf das Ergebnis, mit vollen Minuten rechnen, wodurch sich angenehmere Zahlen ergeben.

Der Seminarraum enthält $V = 40\,\text{m}^3$ Luft, dessen Sauerstoffanteil zur (in Minuten gemessenen) Zeit t gleich $y(t)$ sei. Jede Minute werden $30 \times 16 \times \frac{1}{2} = 240$ Liter Luft eingeatmet;

da Tausend Liter gleich einem Kubikmeter sind, ist das in Bezug auf das Gesamtvolumen ein Anteil von $\frac{240}{40000} = \frac{6}{1000}$. Vorher war das Sauerstoffvolumen $y(t)V$; nachher ist es

$$\frac{6}{1000} \cdot \frac{8}{10} y(t)V + \frac{994}{1000} y(t)V = \frac{48 + 9940}{10000} y(t)V = \frac{9988}{10000} y(t)V\,,$$

da der Sauerstoffgehalt der nicht eingeatmeten Luft natürlich konstant bleibt. Damit sinkt der Sauerstoffgehalt pro Minute um $\frac{12}{10000} y(t)$, d.h.

$$y'(t) = -\frac{12}{10000} y(t) \quad \text{und} \quad y(t) = Ce^{-\frac{12}{10000}} y(t)\,.$$

Der Vorfaktor ist $C = y(0) = 20\%$ und

$$y(90) = \frac{1}{5} e^{-\frac{12 \cdot 90}{10000}} = \frac{1}{5} e^{-\frac{108}{1000}} \approx 0{,}1795255193\,.$$

Der Sauerstoffgehalt ist also auf knapp 18% gesunken.

h) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f(x) = x^2 e^{-x^2}$! Um welche Art von Extrema handelt es sich jeweils?

Lösung: Die Ableitung von e^{-x^2} ist nach der Kettenregel $-2xe^{-x^2}$, die von $f(x)$ also nach der LEIBNIZschen Produktregel $f'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2(-2xe^{-x^2}) = 2(x - x^3)e^{-x^2}$. Da die Exponentialfumktion nur positive Werte annimmt, kann dieser Ausdruck nur verschwinden, wenn $(x - x^3) = x(1 + x)(1 - x)$ verschwindet, also für $x = 0$ und $x = \pm 1$. Für $x = 0$ ist $f(x) = 0$; da $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, kann bei $x = 0$ nur ein Minimum vorliegen; da $f'(x)$ für $0 < |x| < 1$ positiv ist, steigt die Funktion von dort bis zu den Punkten mit $x = \pm 1$; danach wird $f'(x)$ negativ. Somit müssen bei ± 1 Maxima liegen.

i) Ist $c \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle des Polynoms f, so sagen wir, x sei eine r-fache Nullstelle genau dann, wenn es ein Polynom g gibt mit $g(c) \neq 0$, so daß $f(x) = (x - c)^r \cdot g(x)$ ist. Zeigen Sie, daß c genau dann eine mindestens zweifache Nullstelle ist, wenn $f'(c)$ verschwindet.

Lösung: Nach der Produktregel ist $f'(x) = r(x - c)^{r-1} g(x) + (x - c)^r g(x)$. Ist $r = 1$, so ist $(x - c)^{r-1}$ die Konstante eins, also ist $f'(c) = g(c) \neq 0$. Ist dagegen $r \geq 2$, so verschwindet auch $(x - c)^{r-1}$ im Punkt c, d.h. $f'c) = 0$.

j) Zeigen Sie, daß die Ableitung des Polynoms $f(x) = (x^2 - x)(x - 2)(x - 3)$ in jedem der offenen Intervalle $(0, 1)$, $(1, 2)$ und $(2, 3)$ genau eine Nullstelle hat!

Lösung: Da $x^2 - x = x(x - 1)$ ist, verschwindet das Polynom f genau an den vier Stellen $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ und $x = 3$. Nach dem Satz von ROLLE liegt daher in jedem der *abgeschlossenen* Intervalle $[0, 1]$, $[1, 2]$ und $[2, 3]$ mindestens eine Nullstelle von f'. Da alle Nullstellen von f einfach sind, verschwindet $f'(x)$ dort nicht; die Nullstellen liegen also sogar in den jeweiligen offenen Intervallen. Da f' als Polynom vom Grad drei höchstens drei Nullstellen hat, kann in jedem der drei Intervalle höchstens eine liegen, also genau eine.

k) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = x^3 - x + 3$ alle $x \in [-2, 2]$, für die $f'(x)$ gleich dem Differenzenquotienten $\dfrac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)}$ ist!

Lösung: $f'(x) = 3x^2 - 1$, und der Differenzenquotient hat den Wert

$$\frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{(8 - 2 + 3) - (-8 + 2 + 3)}{4} = \frac{9 + 3}{4} = 3\,;$$

gesucht sind also alle $x \in [-2, 2]$, für die $3x^2 - 1 = 3$ oder $x^2 = \frac{4}{3}$ ist. Das sind die beiden Zahlen $\pm\sqrt{\dfrac{4}{3}} = \pm\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$.