Wolfgang K. Seiler — A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 12–14. November 2012

a) Richtig oder falsch: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \ge 0 \\ -x^2 & \text{falls } x \le 0 \end{cases}$ ist differenzierbar in allen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$.

b) Welche Ableitung hat diese Funktion f?

c) Finden Sie für die folgenden Funktionen die größte Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$, auf denen sie definiert sind, und berechnen Sie dort die Ableitung!

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}, \quad g(x) = e^{-x^2}, \quad h(x) = 2^{2^x}, \quad k(x) = \log(4-x^2), \quad \ell(x) = \log_{10} x\,!$$

d) Berechnen Sie über die Formel $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$ Näherungswerte für die Zahlen

$$x_1 = \sqrt{10} = \sqrt{9+1}, \quad x_2 = \sqrt[10]{e} = e^{0,1} \quad \text{und} \quad x_3 = \frac{1}{101} = \frac{1}{100+1}\,!$$

e) Ein Student habe zum Zeitpunkt $t = 0$ der Modulklausur seinen maximalen Wissensstand in Analysis I erreicht. Wenn man davon ausgeht, daß er einen gewissen Bruchteil β davon nie wieder vergißt, erfüllt der Anteil $w(t)$, den er zur Zeit t nach der Prüfung noch beherrscht, nach dem deutschen Psychologen Hermann Ebbinghaus (1850–1909) die Gleichung $w'(t) = -\gamma \cdot \big(w(t) - \beta\big)$ mit einem $\gamma \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $w(t)$!

f) Für einen speziellen Studenten sei $\beta = 10\%$ und $w(1\,\text{Jahr}) = 60\%$. Welchen Teil seiner Kenntnisse hat er (ohne zusätzliches Lernen) bis zum Wiederholungstermin nach drei Monaten vergessen?

g) Ein Erwachsener atmet etwa 16 Mal pro Minute je einen halben Liter Luft ein; die ausgeatmete Luft enthält 20% weniger Sauerstoff als die eingeatmete. Angenommen, 30 Studenten sitzen in einem nicht gelüfteten Seminarraum von $40\,\text{m}^3$, dessen Luft anfänglich 20% Sauerstoff enthält. Wieviel enthält sie noch nach 90 Minuten?

h) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f(x) = x^2e^{-x^2}$! Um welche Art von Extrema handelt es sich jeweils?

i) Ist $c \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle des Polynoms f, so sagen wir, x sei eine r-fache Nullstelle genau dann, wenn es ein Polynom g gibt mit $g(c) \neq 0$, so daß $f(x) = (x-c)^r \cdot g(x)$ ist. Zeigen Sie, daß c genau dann eine mindestens zweifache Nullstelle ist, wenn $f'(c)$ verschwindet.

j) Zeigen Sie, daß die Ableitung des Polynoms $f(x) = (x^2-x)(x-2)(x-3)$ in jedem der offenen Intervalle $(0, 1)$, $(1, 2)$ und $(2, 3)$ genau eine Nullstelle hat!

k) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = x^3 - x + 3$ alle $x \in [-2, 2]$, für die $f'(x)$ gleich dem Differenzenquotienten $\dfrac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}$ ist!