

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 5–7. November 2012

- a) *Richtig oder falsch:* Die Menge aller streng monoton wachsender Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Teilmenge der Menge aller stetiger Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise ist die Funktion

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x-1 & \text{falls } x < 0 \\ x+1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

zwar streng monoton wachsend auf ganz \mathbb{R} , ist aber bei $x = 0$ nicht stetig.

- b) Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_n = x_{n-1} + 3n - 1 \quad \text{für } n \geq 2.$$

Zeigen Sie: $x_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n!$

Lösung: Das kann man beispielsweise durch vollständige Induktion zeigen: Für $n = 1$ ist

$$x_1 = 2 = \frac{3}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1,$$

womit der Induktionsanfang gezeigt wäre.

Nehmen wir an, daß die Behauptung bereits für ein festes $n \in \mathbb{N}$ bewiesen sei, so erhalten wir für x_{n+1} den Ausdruck

$$x_{n+1} = x_n + 3(n+1) - 1 \stackrel{\text{IA}}{=} \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2} + 3n + 2 = \frac{3n^2 + n + 6n + 4}{2} = \frac{3n^2 + 7n + 4}{2}.$$

Im Induktionsschluß müssen wir zeigen, daß dies übereinstimmt mit

$$\frac{3}{2}(n+1)^2 + \frac{n+1}{2} = \frac{3n^2 + 6n + 3 + n + 1}{2} = \frac{3n^2 + 7n + 4}{2},$$

und das ist offensichtlich der Fall. Damit gilt die Formel nach dem Prinzip der vollständigen Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$.

Alternativ könnte man das auch direkt ausrechnen: x_n ist die Summe aller Zahlen der Form $3i - 1$ für $i = 1, \dots, n$, d.h.

$$x_n = \sum_{i=1}^n (3i - 1) = 3 \sum_{i=1}^n i - n \cdot 1 = 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{3n^2 + 3n - 2n}{2} = \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2}.$$

- c) Lösen Sie die quadratische Gleichung $x^2 - 6ix + 7 = 0!$

Lösung: $x^2 - 6ix + 7 = (x-3i)^2 + 9 + 7$ verschwindet genau dann, wenn $(x-3i)^2 = -16$, also $x-3i = \pm 4i$ ist. Die beiden Lösungen sind daher $x_1 = 3i + 4i = 7i$ und $x_2 = 3i - 4i = -i$.

- d) Stellen Sie die reelle Zahl $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{7}}{\sqrt{5} + \sqrt{7}}$ möglichst einfach dar!

Lösung: Erweiterung mit $\sqrt{5} - \sqrt{7}$ führt nach der dritten binomischen Formel auf

$$\frac{\sqrt{5} - \sqrt{7}}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{7})^2}{(\sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{5} - \sqrt{7})} = \frac{12 - 2\sqrt{35}}{5 - 7} = -6 + \sqrt{35}.$$

e) Was ist $(1 - i)^{2012}$?

Lösung: $(1 - i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$, also ist $(1 - i)^4 = -4$ und $(1 - i)^8 = 16 = 2^4$. Da $2012 = 8 \cdot 251 + 4$ ist, folgt

$$(1 - i)^{2012} = (1 - i)^{8 \cdot 251} \cdot (1 - i)^4 = 2^{4 \cdot 251} \cdot (-4) = -2^{1006}.$$

f) Zeigen Sie: Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist $z^2 + \bar{z}^2$ reell.

Lösung: Da die komplexe Konjugation mit der Multiplikation vertauschbar ist, können wir das auch schreiben als $z^2 + \overline{z^2}$. Die Summe der komplexen Zahl z^2 mit ihrer konjugiert komplexen ist einfach das Doppelte des Realteils, also insbesondere reell.

(Wer gerne rechnet, findet natürlich auch schnell heraus, daß der gesuchte Ausdruck für $z = x + iy$ einfach $2(x^2 - y^2)$ ist.)

g) Ist die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{3n+2}{2n+3}$ beschränkt? monoton? konvergent?

Lösung: Wir schreiben

$$x_n = \frac{3n+2}{2n+3} = \frac{\frac{3}{2}(2n+3) - \frac{9}{2} + 2}{2n+3} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} \frac{1}{2n+3}.$$

Damit ist klar, daß die Folge durch $3/2$ nach oben beschränkt ist; eine untere Schranke ist z.B. die Null, denn natürlich sind alle Folgenglieder positiv. Da die Folge der Zahlen $2n+3$ streng monoton ansteigt, ist die Folge der Kehrwerte $1/(2n+3)$ streng monoton fallend; Multiplikation mit $-\frac{5}{2}$ macht daraus eine streng monoton steigende Folge, und die Addition von $\frac{3}{2}$ ändert daran auch nichts mehr. Also ist die Folge streng monoton wachsend (und wir bekommen $x_1 = 1$ als größte untere Schranke). Da die Folge der Zahlen $1/(2n+3)$ eine Nullfolge ist, folgt sofort aus den Rechenregeln für Grenzwerte, daß die Folge der x_n gegen $\frac{3}{2}$ konvergiert.

h) Ist die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $y_n = (-1)^n \frac{3n+2}{2n+3}$ beschränkt? monoton? konvergent?

Lösung: Für gerade n ist $y_n = x_n$, für ungerade n ist $y_n = -x_n$. Da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge ist, gilt das gleiche auch für $(-x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, also auch für $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wegen der Monotonie der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt für gerade $n < m$ aus \mathbb{N} die Ungleichung $y_n < y_m$, für ungerade aber $y_n > y_m$. Damit kann die Folge nicht monoton sein. Sie kann auch nicht konvergieren, denn offensichtlich konvergiert die Teilfolge der y_n mit geraden Indizes gegen $\frac{3}{2}$, die Teilfolge mit ungeraden Indizes aber gegen $-\frac{3}{2}$.

i) Finden Sie eine konvergente, aber nicht monotone Teilfolge von $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$!

Lösung: Wir können zum Beispiel die Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Indizes

$$v_n = \begin{cases} n & \text{falls } n \leq 1000 \\ 2n & \text{falls } n > 1000 \end{cases}$$

betrachten. Die Teilfolge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $z_n = y_{v_n}$ ist nicht monoton, da die ersten Tausend Glieder ständig das Vorzeichen wechseln. Sie konvergiert aber gegen $\frac{3}{2}$, denn für die Konvergenz sind nur Folgenglieder mit großem Index relevant, und für $n \geq 1000$ nähern sich die y_n immer mehr diesem Grenzwert.

j) Bestimmen Sie, sofern es existiert, das Infimum sowie das Supremum der Menge

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5 < 0\}!$$

Lösung: $x^2 - 5$ ist genau dann negativ, wenn $|x| < \sqrt{5}$ ist. Somit ist $-\sqrt{5}$ eine untere und $\sqrt{5}$ eine obere Schranke von A . Ist M eine andere obere Schranke, so ist $M > 0$, da z.B. $1 \in A$, und wäre $M < \sqrt{5}$, so hätten wir für die Zahl $x = \frac{1}{2}(M + \sqrt{5})$ die Ungleichungen $0 < M < x < \sqrt{5}$. Damit wäre $x \in A$, aber $x > M$, im Widerspruch zur Schrankeneigenschaft. Somit ist $\sqrt{5}$ das Supremum von A . Genauso folgt, daß $-\sqrt{5}$ das Infimum ist, denn eine untere Schranke muß negativ sein, und wäre M eine größere untere Schranke als $-\sqrt{5}$, so wäre $-\sqrt{5} < \frac{1}{2}(M - \sqrt{5}) < M$, d.h. wir hätten ein Element von A , das größer als M ist.

k) Drücken Sie die Funktion $f: \begin{cases} \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\frac{1}{2} \log x} \end{cases}$ einfacher aus! ($\mathbb{R}_{>0} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$)

Lösung: Da die Exponentialfunktion nur positive Werte annimmt, ist auch $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem ist

$$f(x)^2 = f(x) \cdot f(x) = e^{\frac{1}{2} \log x} \cdot e^{\frac{1}{2} \log x} = e^{\log x} = x$$

für alle x . Somit ist $f(x) = \sqrt{x}$.

l) Finden Sie für die Funktion $f(x) = (100x)^2$ für $x = 0$ und ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ ist, falls $|y - x| < \delta$!

Lösung: $|f(y) - f(x)| = |f(y) - f(0)| = |f(y)| = (100y)^2 < \varepsilon$ genau dann, wenn

$$y < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{100}$$

ist. Also können wir $\delta = \sqrt{\varepsilon}/100$ setzen.

m) Zeigen Sie durch direkte Rechnung: Ist $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so auch $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = 3f(x)$.

Lösung: $x \in D$ und $\varepsilon > 0$ seien vorgegeben. Wir müssen ein $\delta > 0$ finden, so daß

$$|g(x) - g(y)| = |3f(x) - 3f(y)| = 3|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

ist, falls $|x - y| < \delta$. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von f gibt es ein $\delta > 0$, so daß $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$ falls $|x - y| < \delta$. Wie die obige Gleichung zeigt, ist dann auch $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$.

n) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{e^x}$ ist stetig auf \mathbb{R} .

Lösung: *Richtig*, denn wie aus der Vorlesung bekannt, ist die Exponentialfunktion stetig auf ganz \mathbb{R} , und setzt man eine stetige Funktion in eine andere ein, so ist auch diese Hintereinanderausführung stetig.

o) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{falls } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$ ist stetig auf \mathbb{R} .

Lösung: Sie ist offensichtlich stetig an allen Punkten $x < 0$, denn dort stimmt sie auch in einer gewissen Umgebung überein mit der stetigen Funktion $x \mapsto x - 1$; entsprechend ist sie stetig in allen Punkten $x > 0$, denn dort stimmt sie überein mit $x \mapsto x + 1$. Bleibt der Nullpunkt, wo sie offensichtlich einen Sprung macht. Dort ist sie nicht stetig, denn betrachten wir die Folge $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$, so ist $f(1/n) = 1/n + 1$ für alle n , und die Folge dieser Funktionswerte konvergiert gegen eins. Die Folge $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert aber gegen Null, und $f(0) = -1$. Somit kann f dort nicht stetig sein.

(Man kann das natürlich auch mit der ε - δ -Definition untersuchen; siehe dazu die Lösung der folgenden Aufgabe.)

- p) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{falls } x \leq -1 \\ 2(x + 1) & \text{falls } -1 < x < 1 \\ 3x + 1 & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$ ist stetig auf \mathbb{R} .

Lösung: Für $x \neq \pm 1$ ist das sicherlich richtig, denn in der Umgebung eines solchen Punkts stimmt die Funktion mit einer linearen Funktion überein, und wir wissen aus der Vorlesung, daß sogar alle Polynomfunktionen stetig auf ganz \mathbb{R} sind. An der Stelle $x = -1$ ist $f(x) = x + 1 = 0$, wir müssen also zeigen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $|f(y)| < \varepsilon$ ist für $|y - (-1)| = |y + 1| < \delta$. Für $y \leq -1$ ist $f(y) = y + 1$; hier ist die Bedingung also erfüllt mit $\delta = \varepsilon$. Im Falle $y > -1$ reicht es, wenn wir Werte mit $y < 1$ betrachten: Wenn wir stets fordern, daß $\delta \leq 2$ sein soll, ist dies automatisch erfüllt. Dann ist $f(y) = 2(y + 1)$, das hat einen Betrag kleiner ε genau dann, wenn $|y + 1| < \varepsilon/2$ ist. Mit $\delta = \min(\varepsilon/2, 2)$ ist also die Stetigkeitsbedingung in allen Fällen erfüllt.

Am Punkt $x = 1$ können wir genauso vorgehen: Ist $y \geq 1$, so ist $f(y) = 3y + 1$ und $|f(x) - f(y)| = |4 - (3y + 1)| = 3y - 3$; ist $|y - x| = |y - 1| < \varepsilon/3$, ist dies kleiner als ε . Für $y < 1$, aber $y > -1$, was wir wieder durch $\delta < 2$ erzwingen können, ist

$$|f(x) - f(y)| = |4 - 2(y + 1)| = 2 - 2y;$$

das ist kleiner als ε , wenn $|y - 1| < \varepsilon/2$ ist. Für $\delta = \min(\varepsilon/3, 2)$ ist also auch hier die Stetigkeitsbedingung erfüllt, und damit ist f stetig auf ganz \mathbb{R} .

- q) Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion $f(x) = x^2 + 2x + 3$ auf dem Intervall $[-10, 10]$!

Lösung: $f(x) = x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2$ kann offensichtlich keine kleineren Werte als zwei annehmen; wegen $f(-1) = 2$ wird dieser Wert angenommen und ist somit das Minimum. Da der Graph von f eine Parabel ist, wächst die Funktion monoton, wenn man sich vom Punkt $x = -1$ entfernt; das Maximum wird daher an einem der beiden Intervallränder angenommen. Da $f(-10) = 9^2 + 2$ und $f(10) = 11^2 + 2$, ist das Maximum somit $11^2 + 2 = 123$.

- r) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \exp\left(\frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}\right)$!

Lösung: Die Folge der Terme

$$\frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{(n^3 + 1) - 2}{n^3 + 1} = 1 - \frac{2}{n^3 + 1}$$

konvergiert gegen eins; wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion konvergiert die Folge der x_n daher gegen $e^1 = e$.

- s) *Richtig oder falsch:* Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \log(n + 1) - \log n$ ist eine Nullfolge.

Lösung: *Richtig*, denn

$$x_n = \log(n + 1) - \log n = \log\left(\frac{n + 1}{n}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

und die Folge der Terme $1 + \frac{1}{n}$ konvergiert gegen eins. Wegen der Stetigkeit der Logarithmusfunktion konvergiert daher die Folge der Logarithmen gegen $\log 1 = 0$.

- t) Zeigen Sie: Es gibt eine reelle Zahl $x \in [-1, 1]$ mit der Eigenschaft $e^x = x^2$

Lösung: Wir betrachten die Funktion $f(x) = e^x - x^2$ auf dem Intervall $[-1, 1]$. Am linken Intervallende ist $f(-1) = e^{-1} - 1 < 0$, am rechten ist $f(x) = e - 1 > 0$, da $e > 1$ ist. Wegen der Stetigkeit der von f (Summe der Exponentialfunktion und eines Polynoms) gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in [-1, 1]$ mit $f(x) = 0$, und für diese Zahl x gilt die Gleichung $e^x = x^2$.

u) Zeigen Sie: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ konvergiert für alle $n \geq 2$!

Lösung: Aus der Vorlesung wissen wir, daß dies für $n = 2$ gilt; für $n \geq 2$ ist $k^n \geq k^2$, also $1/k^n \leq 1/k^2$. Somit ist die Reihe für $n = 2$ eine konvergente Majorante für jede Reihe mit $n \geq 2$.

v) *Richtig oder falsch:* Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ konvergiert.

Lösung: Wäre dies richtig, so wäre die Reihe eine konvergente Majorante der harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, denn für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $\sqrt{k} \leq k$, also $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$. Da die harmonische Reihe divergiert, muß die Behauptung falsch sein.