Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 5–7. November 2012

a) Richtig oder falsch: Die Menge aller streng monoton wachsender Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Teilmenge der Menge alle stetiger Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_n = x_{n-1} + 3n - 1 \quad \text{für } n \geq 2\,.$$

Zeigen Sie: $x_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\,!$

c) Lösen Sie die quadratische Gleichung $x^2 - 6ix + 7 = 0\,!$

d) Stellen Sie die reelle Zahl $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$ möglichst einfach dar!

e) Was ist $(1-i)^{2012}$?

f) Zeigen Sie: Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist $z^2 + \overline{z}^2$ reell.

g) Ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \dfrac{3n+2}{2n+3}$ beschränkt? monoton? konvergent?

h) Ist die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = (-1)^n \dfrac{3n+2}{2n+3}$ beschränkt? monoton? konvergent?

i) Finden Sie eine konvergente, aber nicht monotone Teilfolge von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$!

j) Bestimmen Sie, sofern es existiert, das Infimum sowie das Supremum der Menge

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 - 5 < 0\right\}\,!$$

k) Drücken Sie die Funktion $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\frac{1}{2}\log x} \end{cases}$ einfacher aus! ($\mathbb{R}_{>0} \underset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$)

l) Finden Sie für die Funktion $f(x) = (100x)^2$ für $x = 0$ und ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ ist, falls $|y - x| < \delta$!

m) Zeigen Sie durch direkte Rechnung: Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so auch $g\colon D \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 3f(x)$.

n) Richtig oder falsch: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{e^x}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

o) Richtig oder falsch: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{falls } x \leq 0 \\ x+1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

p) Richtig oder falsch: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \leq -1 \\ 2(x+1) & \text{falls } -1 < x < 1 \\ 3x+1 & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

q) Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion $f(x) = x^2 + 2x + 3$ auf dem Intervall $[-10,\, 10]\,!$

r) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \exp\left(\dfrac{n^3-1}{n^3+1}\right)$!

s) Richtig oder falsch: Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \log(n+1) - \log n$ ist eine Nullfolge.

t) Zeigen Sie: Es gibt eine reelle Zahl $x \in [-1,\, 1]$ mit der Eigenschaft $e^x = x^2$

u) Zeigen Sie: Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ konvergiert für alle $n \geq 2\,!$

v) Richtig oder falsch: Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ konvergiert.