Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 29–31. Oktober 2012

a) Zeigen Sie: Die Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}_{\geq 0} \underset{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\right\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$$

ist stetig!

Lösung: Sei zunächst $x > 0$, und $\varepsilon > 0$ sei vorgegeben. Für $y \geq 0$ ist nach der dritten binomischen Formel

$$(\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{x}) = y - x\,, \text{ also ist } \quad \left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| = \frac{|y-x|}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} < \frac{|y-x|}{\sqrt{x}}\,.$$

Setzen wir daher $\delta = \varepsilon \cdot \sqrt{x}$, so ist

$$\left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| = \frac{|y-x|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} < \frac{|y-x|}{\sqrt{x}} < \frac{\delta}{\sqrt{x}} = \varepsilon\,.$$

Bleibt noch der Fall $x = 0$; hier müssen wir zeigen, daß es zu jeden $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß aus $y < \delta$ folgt, daß $\sqrt{y} < \varepsilon$ ist. Hier können wir offensichtlich $\delta = \varepsilon^2$ setzen.

Alternative Lösung: Wir wissen, daß die Funktion

$$\begin{cases} \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

streng monoton wachsend, stetig und surjektiv ist; somit gibt es eine Umkehrfunktion. Da der Satz aus der Vorlesung nur für endliche Intervalle bewiesen wurde, müssen wir – ähnlich wie beim Beweis der Stetigkeit des Logarithmus – für die Stetigkeit in einem vorgegebenen Punkt $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ zunächst ein $a > \max\{1, x\}$ wählen und die Quadratfunktion als Funktion von $[0, a]$ nach $[0, a^2]$ betrachten; hier gibt uns der Satz die Stetigkeit im Punkt x.

b) Zeigen Sie: Konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen x_n gegen $x \in \mathbb{R}$, so konvergiert die Folge $\left(\sqrt{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{x}$!

Lösung: Dies folgt sofort aus der in der vorigen Aufgabe bewiesenen Stetigkeit der Wurzelfunktion und dem entsprechenden Satz aus der Vorlesung.

c) Für die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ gebe es eine reelle Zahl c, so daß $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|$ für alle $x, y \in D$. Zeigen Sie, daß f stetig auf D ist.

Lösung: Ist $c = 0$, so muß f konstant sein, ist also stetig. Andernfalls ist, zumindest wenn D mehr als ein Element enthält, $c > 0$. Wir betrachten ein beliebiges Element $x \in D$ und ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Mit $\delta = \varepsilon/c$ gilt dann für jedes $y \in D$ mit $|x - y| < \delta$

$$|f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y| < c\delta = \varepsilon\,;$$

die Funktion ist also stetig in x. Da $x \in D$ beliebig gewählt war, ist sie stetig auf ganz D.

d) Zeigen Sie, daß es für die Funktion $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ kein solches $c \in \mathbb{R}$ gibt!

Lösung: Für $x = 0$ ist $|x - y| = y$ und $|f(x) - f(y)| = \sqrt{y}$. Für die Zahl c müßte daher $\sqrt{y} \leq cy$ sein für alle $y \geq 0$. Damit müßte insbesondere $c \geq 1/\sqrt{y}$ sein für alle $y > 0$, und diese Ungleichung erfüllt keine reelle Zahl c.

e) *Richtig oder falsch:* Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist auch die Funktion $g\colon D \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x^2)$ dort, wo sie definiert ist, stetig.

Lösung: *Richtig,* denn g ist die Hintereinanderausführung von f mit der auf ganz $\mathbb{R}$ stetigen Funktion $x \mapsto x^2$.

f) Welche Bedingungen muß D erfüllen, damit aus der Stetigkeit von g die von f folgt?

Lösung: Da $x^2 \geq 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$, kann die Stetigkeit von g nichts aussagen über die Stetigkeit von f bei negativen Argumenten. Somit darf D jedenfalls keine negativen Zahlen enthalten. Das allein genügt aber noch nicht, denn auch eine positive Zahl muß nicht notwendigerweise Quadrat eines Elements *aus* D sein. Wir müssen daher fordern, daß jedes Element von D sich als Quadrat eines Elements von D darstellen läßt, d.h.

$$D \subseteq \left\{ x^2 \mid x \in D \right\}.$$

Diese Bedingung erfüllen beispielsweise die nichtnegativen sowie auch die positiven reellen Zahlen, die Intervalle $[0, 1]$ und $(0, 1)$, aber auch jedes Intervall $[1, a]$ mit $a > 1$. Wenn f auf einer solchen Menge D definiert ist, können wir f schreiben als die Hintereinanderausführung von g und der Wurzelfunktion, die in diesem Fall wohldefiniert und stetig ist und auf D Werte aus D liefert: Für $x \in D$ ist $f(x) = g(\sqrt{x})$ mit $\sqrt{x} \in D$.

g) Die GAUSS-Klammer $[x]$ einer reellen Zahl x bezeichnet die größte ganze Zahl $z \leq x$. An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x) = [x]$ stetig, an welchen nicht?

Lösung: Ist x eine ganze Zahl, so ist $f(x) = [x] = x$. Für eine reelle Zahl y mit $x-1 < y < x$ ist $f(y) = x - 1$, für y mit $x \leq y < x + 1$ aber ist $f(y) = x$. Damit kann die Funktion an diesen Stellen nicht stetig sein: Sonst müßte es beispielsweise für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein $\delta > 0$ geben, so daß $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}$ wäre für alle y mit $|x - y| < \delta$. Ist aber η irgendeine positive reelle Zahl, die echt kleiner als δ ist, so erfüllt $y = x - \eta$ zwar sicherlich die letztere Ungleichung, aber $f(y) \leq x - 1$ hat größeren Abstand von $f(x) = x$ als $\frac{1}{2}$. Also ist f für jedes $x \in \mathbb{Z}$ unstetig. Ist $x \neq \mathbb{Z}$ und $\delta = \min(x - [x], [x] + 1 - x)$ der Abstand zur nächsten ganzen Zahl, so ist $f(y) = f(x)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|y - x| < \delta$, für jedes $\varepsilon > 0$ ist also mit diesem δ die Forderung aus der Definition der Stetigkeit erfüllt.

h) *Richtig oder falsch:* Ist für die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = |f(x)|$ stetig, so auch f.

Lösung: *Falsch:* Definieren wir etwa

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases},$$

so ist f in jedem Punkt unstetig, aber $g(x) = |f(x)| = 1$ ist eine konstante Funktion und somit überall stetig.

i) Finden Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; die für jedes positive $x \in \mathbb{R}$ sowie für jedes negative $x \in \mathbb{R}$ stetig ist, im Punkt $x = 0$ aber unstetig.

Lösung: Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ ist stetig in jedem Punkt $x \neq 0$: Für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ können wir einfach, unabhängig von ε, das gesuchte δ als $|x|/2$ definieren. Für ein y mit $|y - x| < \delta$ ist dann sicherlich $y \neq 0$, also $f(x) = f(y) = 0$; die Funktion ist also stetig in x.

Für den Punkt $x = 0$ kann es offensichtlich zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ kein $\delta > 0$ geben, so daß

$$|f(y) - f(x)| = |f(y) - 1| < \varepsilon$$

ist, denn für jedes $y \neq 0$ ist $f(y) = 0$ und damit $|f(y) - f(x)| = 1$.

j) $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$h\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \leq a \\ g(x) & \text{falls } x > a \end{cases} \end{cases}$$

genau dann stetig auf $\mathbb{R}$ ist, wenn $f(a) = g(a)$ ist.

Lösung: Offensichtlich ist h in jedem Punkt $x \neq a$ stetig; wir müssen das δ, das wegen der Stetigkeit von f *bzw.* g existiert, nur gegebenenfalls so verkleinern, daß jedes y mit $|x - y| < \delta$ auf derselben Seite von a liegt wie x.

Bleibt der Punkt $x = a$. Nach dem Folgenkriterium ist h stetig in a, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert a gilt:

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n) = h(a)\,.$$

Wir teilen die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf in zwei Teilfolgen $(x_{\mu_n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_{\nu_n})_{n\in\mathbb{N}}$, wobei die erste Teilfolge alle $x_n \leq a$ enthalten soll und die zweite den Rest. Wegen der Stetigkeit von f konvergiert die erste Teilfolge, so sie unendlich viele Glieder enthält, gegen $f(a)$; die zweite entsprechend wegen der Stetigkeit von g gegen $g(a)$. Ist $f(a) = g(a)$, so konvergiert auch die Gesamtfolge gegen diesen Wert, denn zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so daß $|f(a) - f(x_{\mu_n})| < \varepsilon$ ist für alle $n \geq n_1$; entsprechend gibt es auch ein $n_2 \in \mathbb{N}$, so daß $|f(a) - g(x_{\nu_n})| = |g(a) - g(x_{\nu_n})| < \varepsilon$ ist für $n \geq n_2$. Für $n \geq n_0 = \max\{\mu_{n_1}, \nu_{n_2}\}$ ist daher $|h(a) - h(x_n)| < \varepsilon$, denn jedes x_n kommt ja in einer der beiden Teilfolgen vor.

Ist $f(a) \neq g(a)$, so betrachten wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert a derart, daß es unendlich viele n gibt mit $x_n \leq a$ und auch unendlich viele x_n mit $x_n > a$. Dann kann die Folge der $f(x_n)$ nicht gegen $f(a)$ konvergieren, denn für ein $\varepsilon < \frac{1}{2}\,|f(a) - g(a)|$ gibt es ein n_2, so daß für die Teilfolge der $x_n > a$ alle Funktionswerte einen kleineren Abstand als ε von $g(a)$ haben, und damit kann nach der Dreiecksungleichung keines einen Abstand kleiner ε von $f(a)$ haben.

k) Nach §32a EStG berechnet sich die Einkommensteuer aus dem zu versteuernden Einkommen x wie folgt: Bis 7 834 Euro, müssen keine Steuern bezahlt werden. Liegt x darüber, aber nicht über 13 139 Euro, beträgt die Steuer $(939{,}68 \cdot y + 1\,400) \cdot y$, wobei y (abgesehen von Rundungsvorschriften) ein Zehntausendstel des 7 834 Euro übersteigenden Teils des Einkommens ist. Danach, bis 52 551 Euro, ist die Steuer $(228{,}74 \cdot z + 2\,397) \cdot z + 1\,007$, wobei z ein Zehntausendstel des 13 139 Euro übersteigenden Teils des Einkommens ist. Danach gilt bis 250 400 Euro die Formel $0{,}42 \cdot x - 8\,064$, dann schließlich $0{,}45 \cdot x - 15\,576$. Ist die zu zahlende Einkommensteuer eine stetige Funktion von x, wenn wir (im Gegensatz zum EStG) das Einkommen als kontinuierliche Größe, d.h. als beliebige reelle Zahl betrachten? Wenn nicht, wo ist sie unstetig?

Lösung: Da wir die Rundungsvorschriften des EStG ignorieren, sind

$$y = \frac{x - 7\,834}{10\,000} \quad \text{und} \quad z = \frac{x - 13\,139}{10\,000}$$

stetige (sogar lineare) Funktionen von x; die beiden quadratischen Polynome, in die y und z eingesetzt werden, sind (als Polynome) stetige Funktionen von y *bzw.* z, also auch von x. Die konstante Funktion null und die beiden linearen Funktionen sind ebenfalls stetig; jede der fünf Komponenten ist also als Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Nach der vorigen Aufgabe sind die einzigen Kandidaten für Unstetigkeit die Stellen, an denen die zwischen zwei Funktionen gewechselt wird; wir müssen also dort die Werte der linksseitigen und der rechtsseitigen Funktion vergleichen.

Für $x = 7\,834$ ist $y = 0$, also verschwindet das quadratische Polynom in y genau wie die Konstante Null im Intervall davor; hier ist die Funktion also stetig.

Für $x = 13\,139$ ist $y = 0{,}5305$ und $z = 0$. Das Polynom in y hat den Wert $1007{,}154377$, das in z natürlich den Wert 1007. Somit ist die Funktion hier nicht stetig. (Für Besteuerungszwecke ist der Sprung um rund 15 Cent irrelevant, da tatsächlich stets auf volle Euro abgerundet wird.)

Für $x = 52\,551$ ist $z = 3{,}9412$; das Polynom in z nimmt dort den Wert $14\,007{,}087\,958\,825$ an, während $0{,}42 \cdot x - 8\,064 = 14\,007{,}42$ ist. Wieder haben wir mathematisch eine Unstetigkeit.

Für $x = 250\,400$ schließlich ist $0{,}42 \cdot x - 8\,064 = 97\,104$, und diesen Wert nimmt auch das andere lineare Polynom an. Somit ist die Funktion an dieser Stelle stetig.