

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 29–31. Oktober 2012

a) Zeigen Sie: Die Funktion

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}_{\geq 0} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$$

ist stetig!

- b) Zeigen Sie: Konvergiert die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen x_n gegen $x \in \mathbb{R}$, so konvergiert die Folge $(\sqrt{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen \sqrt{x} !
- c) Für die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ gebe es eine reelle Zahl c , so daß $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|$ für alle $x, y \in D$. Zeigen Sie, daß f stetig auf D ist.
- d) Zeigen Sie, daß es für die Funktion $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ kein solches $c \in \mathbb{R}$ gibt!
- e) *Richtig oder falsch*: Ist $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist auch die Funktion $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x^2)$ dort, wo sie definiert ist, stetig.
- f) Welche Bedingungen muß D erfüllen, damit aus der Stetigkeit von g die von f folgt?
- g) Die GAUSS-Klammer $[x]$ einer reellen Zahl x bezeichnet die größte ganze Zahl $z \leq x$. An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x) = [x]$ stetig, an welchen nicht?
- h) *Richtig oder falsch*: Ist für die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = |f(x)|$ stetig, so auch f .
- i) Finden Sie eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; die für jedes positive $x \in \mathbb{R}$ sowie für jedes negative $x \in \mathbb{R}$ stetig ist, im Punkt $x = 0$ aber unstetig.
- j) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetige Funktionen auf \mathbb{R} und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$h: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \leq a \\ g(x) & \text{falls } x > a \end{cases} \end{cases}$$

genau dann stetig auf \mathbb{R} ist, wenn $f(a) = g(a)$ ist.

- k) Nach §32a EStG berechnet sich die Einkommensteuer aus dem zu versteuernden Einkommen x wie folgt: Bis 7834 Euro, müssen keine Steuern bezahlt werden. Liegt x darüber, aber nicht über 13 139 Euro, beträgt die Steuer $(939,68 \cdot y + 1400) \cdot y$, wobei y (abgesehen von Rundungsvorschriften) ein Zehntausendstel des 7834 Euro übersteigenden Teils des Einkommens ist. Danach, bis 52551 Euro, ist die Steuer $(228,74 \cdot z + 2397) \cdot z + 1007$, wobei z ein Zehntausendstel des 13 139 Euro übersteigenden Teils des Einkommens ist. Danach gilt bis 250400 Euro die Formel $0,42 \cdot x - 8064$, dann schließlich $0,45 \cdot x - 15576$. Ist die zu zahlende Einkommensteuer eine stetige Funktion von x , wenn wir (im Gegensatz zum EStG) das Einkommen als kontinuierliche Größe, d.h. als beliebige reelle Zahl betrachten? Wenn nicht, wo ist sie unstetig?