Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 22.–24. Oktober 2012

a) Richtig oder falsch: Konvergiert die reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in \mathbb{R}$, so konvergiert auch jede ihrer Teilfolgen gegen x.

Lösung: *Richtig,* denn für die Teilfolge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = x_{\nu_n}$ ist $\nu_n \geq n$ für alle n, da ν_1 als natürliche Zahl mindestens eins sein muß und die Folge der ν_n streng monoton wächst. Für $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so daß $|x - x_n| < \varepsilon$ ist für alle $n \geq n_0$; für $n \geq n_0$ ist auch $\nu_n \geq n \geq n_0$, also ist auch $|y_n - x| = |x_{\nu_n} - x| < \varepsilon$.

b) Richtig oder falsch: Die reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn die drei Teilfolgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $u_n = x_{2n}$, $v_n = x_{2n+1}$ und $w_n = x_{3n}$ konvergent sind.

Lösung: Wie wir gerade gesehen haben, müssen auch alle Teilfolgen einer konvergenten Folge konvergieren; wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, konvergieren also auch die drei Teilfolgen. Problematischer ist die Umkehrung:

Wenn wir nur wüßten, daß die Folgen der u_n und der v_n konvergieren, könnten wir nicht ausschließen, daß beide gegen verschiedene Grenzwerte konvergieren und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ somit unbestimmt divergiert; schließlich haben die beiden Teilfolgen nichts miteinander zu tun. Bei der dritten Folge allerdings sind die Indizes die Dreierzahlen, und die sind abwechselnd gerade und ungerade. Das sollte einen Zusammenhang zwischen den drei Folgen herstellen. Seien u, v, w die Grenwerte der drei Folgen. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ natürliche Zahlen n_1, n_2 und n_3, so daß

$$\begin{aligned} |u - u_n| &< \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n \geq n_1\,, \\ |v - v_n| &< \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n \geq n_2 \quad \text{und} \\ |w - w_n| &< \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n \geq n_3\,. \end{aligned}$$

Für $n_0 = \max(2n_1, 2n_2, 3n_3)$ ist daher

$$\begin{aligned} |u - x_n| &< \varepsilon/2 \quad \text{für alle geraden } n \geq n_0\,, \\ |v - x_n| &< \varepsilon/2 \quad \text{für alle ungeraden } n \geq n_0 \quad \text{und} \\ |w - x_n| &< \varepsilon/2 \quad \text{für alle durch drei teilbaren } n \geq n_0\,. \end{aligned}$$

Für eine durch sechs teilbare natürliche Zahl $n \geq n_0$ ist somit

$$|u - w| \leq |u - x_n| + |x_n - w| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

und für eine ungerade Dreierzahl $n \geq n_0$ haben wir die Abschätzung

$$|v - w| \leq |v - x_n| + |x_n - w| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Da wir diese Abschätzungen für jedes $\varepsilon > 0$ beweisen können, muß $u = w$ und $v = w$ sein, also $u = v = w$. Bezeichnen wir diesen gemeinsamen Wert als x, so ist $|x - x_n| < \varepsilon$ für jedes $n \geq n_0$, denn n muß entweder gerade oder ungerade sein (und ist eventuell zusätzlich auch noch durch drei teilbar).

c) Richtig oder falsch: Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Lösung: *Richtig:* Die minimalistische Lösung bestünde darin zu sagen, daß wir aus der Vorlesung wissen, daß jede konvergente Folge eine CAUCHY-Folge ist und beim Beweis des CAUCHYschen Konvergenzkriteriums gezeigt haben, daß jede CAUCHY-Folge beschränkt ist.

Ein direkter Beweis ist allerdings auch nicht viel aufwendiger: Konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x, so gibt es insbesondere für $\varepsilon = 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $|x - x_n| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Für $n \geq n_0$ ist daher

$$|x_n| = |x + (x_n - x)| \leq |x| + |x - x_n| < |x| + 1 .$$

Bezeichnet M das Maximum der n_0 Zahlen $|x_1|, \ldots, |x_{n_0-1}|$ und $|x|+1$, ist daher $|x_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

d) Finden Sie in der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = (-2)^n + (-1)^{n+1}/2n$ eine monoton wachsende und eine monoton fallende Teilfolge!

Lösung: Der erste Term $(-2)^n$ ist positiv und monoton wachsend, wenn wir uns auf gerade n beschränken, aber negativ und monoton fallend, wenn wir uns auf ungerade n beschränken. Der zweite Term ist negativ und monoton wachsend für gerade n, aber positiv und monoton fallend für ungerade n. Damit ist die Teilfolge der geraden Terme monoton wachsend, die der ungeraden monoton fallend.

e) Finden Sie in der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = (-2)^n + (-1)^n/2n$ eine monoton wachsende und eine monoton fallende Teilfolge!

Lösung: Wenn wir uns wieder zunächst auf die geraden Indizes beschränken, ist nun der erste Term monoton wachsend und positiv, der zweite positiv und monoton fallend. Da die Folge der $(-2)^{2n} = 4^n$ aber eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen ist, während der zweite Term stets einen Betrag von höchstens $1/2$ hat, bleibt die Folge trotzdem monoton wachsend. Aus dem gleichen Grund bleibt die Folge der ungeraden Terme monoton fallend.

f) *Richtig oder falsch:* Jede nach oben beschränkte Folge reeller Zahlen hat eine konvergente Teilfolge.

Lösung: *Falsch;* die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = -n$ ist offensichtlich nach oben beschränkt, hat aber keine konvergente Teilfolge.

g) *Richtig oder falsch:* Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge, so auch $\big(|x_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösung: *Richtig,* denn ist $|x_n - x_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$, so ist auch $||x_n| - |x_m|| < \varepsilon$: Wenn wir in der verschärften Dreiecksungleichung

$$\big||x - y| - |y - z|\big| \leq |x - z| \leq |x - y| + |y - z|$$

$x = x_n, y = 0$ und $z = x_m$ setzen, erhalten wir die Ungleichung $\big||x_n| - |x_m|\big| \leq |x_n - x_m|$.

h) *Richtig oder falsch:* Ist $\big(|x_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge, so auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösung: Das ist natürlich falsch: Beispielsweise ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = (-1)^n$ sicherlich keine CAUCHY-Folge (sonst wäre sie schließlich konvergent), aber die Folge der Beträge ist die konstante Folge aus lauter Einsen, und die ist natürlich eine CAUCHY-Folge.

i) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_n = x_{n-1} + \dfrac{1}{n(n+1)}$. Zeigen Sie: Das ist eine CAUCHY-Folge!

Lösung: Wir müssen zeigen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|x_n - x_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. Für $n > m$ ist

$$x_n - x_m = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=m+1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i+1}$$
$$= \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=m+2}^{n+1} \frac{1}{i} = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{m+1}\,.$$

Ist n_0 größer als $1/\varepsilon$, ist dies für alle $n, m \geq n_0$ kleiner als ε.

j) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_n = x_{n-1} + \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$. Zeigen Sie: Das ist eine CAUCHY-Folge!

Lösung: Wieder müssen wir zeigen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|x_n - x_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. Für $n > m$ ist

$$x_n - x_m = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{(-1)^i}{i(i+1)}\,,$$

aber wenn wir das wie oben auflösen, erhalten wir nichts nützliches. Nach der Dreiecksungleichung ist aber

$$|x_n - x_m| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \left|\frac{(-1)^i}{i(i+1)}\right| = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}\,,$$

und wie wir oben nachgerechnet haben, wird das kleiner ε, sobald n, m über einer Schranke $n_0 \geq 1/\varepsilon$ liegen.

k) Zeigen Sie: Zu jeder irrationalen Zahl $x \in (0,\, 1)$ gibt es eine streng mononoton wachsende Folge $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen, so daß x Grenzwert der rekursiv durch $x_1 = 2^{-\nu_1}$ und $x_n = x_{n-1} + 2^{-\nu_n}$ definierten Folge ist!

Lösung: Für jedes $x > 0$ gibt es eine kleinste natürliche Zahl ν_1, so daß $x > 2^{-\nu_1}$ ist. Diese nehmen wir, setzen $x_1 = 2^{-\nu_1}$ und $y_1 = x - x_1$. Da ν_1 kleinstmöglich gewählt wurde, ist $y_1 < 2^{-\nu_1}$; sonst wäre schließlich $x > 2^{-\nu_1} + 2^{-\nu_1} = 2^{-(\nu_1 - 1}$. Außerdem ist $y_1 > 0$, da x sonst rational wäre.
Zur rekursiven Konstruktion der weiteren ν_n nehmen wir an, ν_n sei bereits konstruiert und damit auch reelle Zahlen $x_n = 2^{-\nu_n}$ und y_n mit $x = x_n + y_n$ und $0 < y_n < 2^{-\nu_n}$. Dann sei ν_{n+1} die kleineste natürliche Zahl mit $x > 2^{-\nu_{n+1}}$. Wir setzen $x_{n+1} = x_n + 2^{-\nu_{n+1}}$; wie oben folgt, daß $y_{n+1} = x - x_n$ positiv und kleiner als $2^{-\nu_{n+1}}$ ist. Die Folge der x_n konvergiert gegen x, da $y_n = x - x_n$ stets kleiner ist als $2^{-\nu_n}$ und die Folge der ν_n monoton wächst.

l) Am ersten Januar 2012 werden 1000 Euro angelegt zu einem Zinssatz von 2%. Welches Kapital ist am Jahresende vorhanden, wenn nur einmal jährlich, einmal monatlich *bzw.* kontinuierlich verzinst wird?

Lösung: Bei einmal jährlicher Verzinsung kommen 2% dazu, am Jahresende sind also 1020 Euro vorhanden. Bei monatlicher Verzinsung wird das Kapital mit $(1+0.02/12)^{12} \approx 1{,}020184360$ multipliziert und damit zu 1020 Euro und 18 Cent. Bei kontinuierlicher Verzinsung ist der Multiplikator $e^{0.02} \approx 1{,}020201340$, am Jahresende gibt es also 1020 Euro und 20 Cent.

m) Konvergieren die Folgen $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(e^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$? Wenn ja, wohin?

Lösung: Da $e > 1$ ist, divergiert die Folge der Zahlen e^n bestimmt gegen ∞. Da $e^{-n} = 1/e^n$ ist, folgt daraus, daß die Folge der e^{-n} eine Nullfolge ist.

n) Zeigen Sie, daß die Exponentialfunktion eine injektive Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ definiert!

Lösung: Angenommen, $e^x = e^y$, aber $x \neq y$. Dann ist entweder $x < y$ oder $y < x$. Im ersten Fall ist $e^x < e^y$, im zweiten $e^y < e^x$, beides im Widerspruch zur vorausgesetzten Gleichheit. Also muß $x = y$ sein, womit die Injektivität bewiesen wäre.

o) Zeigen Sie, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\log e^x = x$!

Lösung: $u = \log e^x$ ist die eindeutig bestimmt reelle Zahl u, für die $e^u = e^x$ ist, also x.

p) Zeigen Sie, daß der Logarithmus eine bijektive Abbildung von der Menge aller positiver reeller Zahlen auf die Menge aller reeller Zahlen definiert!

Lösung: Ist y irgendeine reelle Zahl, so ist $x = e^y$ positiv, da die Exponentialfunktion nur positive Werte annimmt. Außerdem ist $\log x = \log e^y = y$; die Zahl $x = e^y$. Damit ist die Surjektivität gezeigt. Zum Nachweis der Injektivität betrachten wir irgendeine reelle Zahl z mit $y = \log z$. Dann ist $x = e^y = e^{\log z} = z$; das Urbild ist also eindeutig bestimmt.

q) Der *binäre Logarithmus* $y = \operatorname{lb} x$ einer positiven reellen Zahl x ist jene reelle Zahl, für die $2^y = x$ ist. Er spielt in der Informationstheorie eine große Rolle. Zeigen Sie: Die Anzahl der Bits (= **bi**nary digi**ts**) zur Darstellung einer natürlichen Zahl n im Zweiersystem ist die kleinste natürliche Zahl r, die größer ist als $\operatorname{lb} n$.

Lösung: Ist $r \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $r - 1 \leq \operatorname{lb} n = \frac{\log n}{\log 2} \leq r$, so ist auch $(r-1)\log 2 < \log n \leq r \log 2$. Nach unseren Rechenregeln für die Exponentialfunktion ist dann auch $e^{(r-1)\log 2} < e^{\log n} \leq e^{r \log 2}$, d.h. $2^{r-1} < n \leq 2^r$. Diese beiden Ungleichungen werden genau von den natürlichen Zahlen n erfüllt, die r Binärziffern haben.

r) $a, b > 1$ seien zwei reelle Zahlen. Zeigen Sie: Es gibt eine reelle Zahl c, so daß

$$\log_b x = c \log_a x$$

für alle $x > 0$!

Lösung: Wie wir in der Vorlesung gesehen haben, ist für eine positive reelle Zahl x

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} \quad \text{und} \quad \log_b x = \frac{\log x}{\log b},$$

also ist $\log_b x = \frac{\log a}{\log b} \log_a x$.

s) Zeigen Sie mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion, daß für jede *ganze* Zahl n und jede positive reelle Zahl x gilt: $\log(x^n) = n \log x$.

Lösung: Für $n = 1$ ist natürlich $\log x^1 = 1 \cdot \log n$. Angenommen, die Behauptung ist bereits bewiesen für eine feste natürliche Zahl n. Dann ist

$$\log x^{n+1} = \log(x^n \cdot x) = \log x^n + \log x\,.$$

Nach Induktionsannahme ist $\log x^n = n \log x$, also

$$\log x^{n+1} = n \log x + \log x = (n+1) \log x\,,$$

wie im Induktionsschluß zu zeigen ist. Somit ist nach dem Prinzip der vollständigen Induktion $\log x^n = n \log x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zu zeigen war das aber für alle $n \in \mathbb{Z}$. Für $n = 0$ ist $\log x^0 = \log 1 = 0$. Für negative ganze Zahlen $-n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist $x^{-n} \cdot x^n = 1$, also $\log x^{-n} + \log x^n = \log 1 = 0$. Wie bereits gezeigt, ist $\log x^n = n \log x$, also $\log x^{-n} = -n \log x$, wie behauptet.

t) Zeigen Sie: Für jede reelle Zahl $x > 1$ ist $\log x \le x - 1$!

Lösung: Nach einer der beiden definierenden Eigenschaften der Exponentialfunktion ist $e^y \ge 1 + y$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Damit ist auch $e^{x-1} \ge x$ für alle $x \in \mathbb{R}$: Man setze einfach $y = x - 1$. Wenn die in der Aufgabe aufgestellte Behauptung falsch wäre, könnten wir aus der Ungleichung $\log x > x - 1$ folgern, daß $x = e^{\log x} > e^{x-1}$ wäre, im Widerspruch zur gerade gezeigten Ungleichung. Somit ist die Behauptung richtig.