Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 22.–24. Oktober 2012

a) *Richtig oder falsch:* Konvergiert die reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in \mathbb{R}$, so konvergiert auch jede ihrer Teilfolgen gegen x.

b) *Richtig oder falsch:* Die reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn die drei Teilfolgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $u_n = x_{2n}$, $v_n = x_{2n+1}$ und $w_n = x_{3n}$ konvergent sind.

c) *Richtig oder falsch:* Jede konvergente Folge ist beschränkt.

d) Finden Sie in der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = (-2)^n + (-1)^{n+1}/2n$ eine monoton wachsende und eine monoton fallende Teilfolge!

e) Finden Sie in der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = (-2)^n + (-1)^n/2n$ eine monoton wachsende und eine monoton fallende Teilfolge!

f) *Richtig oder falsch:* Jede nach oben beschränkte Folge reeller Zahlen hat eine konvergente Teilfolge.

g) *Richtig oder falsch:* Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, so auch $\big(|x_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

h) *Richtig oder falsch:* Ist $\big(|x_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, so auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

i) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_n = x_{n-1} + \dfrac{1}{n(n+1)}$. Zeigen Sie: Das ist eine Cauchy-Folge!

j) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_n = x_{n-1} + \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$. Zeigen Sie: Das ist eine Cauchy-Folge!

k) Zeigen Sie: Zu jeder irrationalen Zahl $x \in (0, 1)$ gibt es eine streng mononoton wachsende Folge $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen, so daß x Grenzwert der rekursiv durch $x_1 = 2^{-\nu_1}$ und $x_n = x_{n-1} + 2^{-\nu_n}$ definierten Folge ist!

l) Am ersten Januar 2012 werden 1000 Euro angelegt zu einem Zinssatz von 2%. Welches Kapital ist am Jahresende vorhanden, wenn nur einmal jährlich, einmal monatlich *bzw.* kontinuierlich verzinst wird?

m) Konvergieren die Folgen $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(e^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$? Wenn ja, wohin?

n) Zeigen Sie, daß die Exponentialfunktion eine injektive Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ definiert!

o) Zeigen Sie, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\log e^x = x$!

p) Zeigen Sie, daß der Logarithmus eine bijektive Abbildung von der Menge aller positiver reeller Zahlen auf die Menge aller reeller Zahlen definiert!

q) Der *binäre Logarithmus* $y = \operatorname{lb} x$ einer positiven reellen Zahl x ist jene reelle Zahl, für die $2^y = x$ ist. Er spielt in der Informationstheorie eine große Rolle. Zeigen Sie: Die Anzahl der Bits (= **b**inary dig**its**) zur Darstellung einer natürlichen Zahl n im Zweiersystem ist die kleinste natürliche Zahl r, die größer ist als $\operatorname{lb} n$.

r) $a, b > 1$ seien zwei reelle Zahlen. Zeigen Sie: Es gibt eine reelle Zahl c, so daß

$$\log_b x = c \log_a x$$

für alle $x > 0$!

s) Zeigen Sie mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion, daß für jede *ganze* Zahl n und jede positive reelle Zahl x gilt: $\log(x^n) = n \log x$.

t) Zeigen Sie: Für jede reelle Zahl $x > 1$ ist $\log x \le x - 1$!