Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 15.–17. Oktober 2012

a) Beweisen Sie die folgende *Vierecksungleichung:* Für vier reelle Zahlen $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ ist stets: $\big||x-y|-|z-w|\big| \le |x-z|+|y-w|$

Lösung: Nach der verschärften Dreiecksungleichung ist

$$\big||x-y|-|y-z|\big| \le |x-z| \quad \text{und} \quad \big||y-z|-|z-w|\big| \le |y-w| \; .$$

Wie wir bereits wissen, ist der Betrag einer Summe kleiner oder gleich der Summe der Beträge; daher ist

$$\begin{aligned}\big||x-y|-|z-w|\big| &= \big|\big(|x-y|-|y-z|\big)+\big(|y-z|-|z-w|\big)\big| \\ &\le \big||x-y|-|y-z|\big| + \big||y-z|-|z-w|\big| \le |x-z|+|y-w| \; ,\end{aligned}$$

wie behauptet.

b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien drei Folgen reeller Zahlen derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \le y_n \le z_n$. Zeigen Sie: Falls die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beide konvergent sind und denselben Grenzwert x haben, so ist auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x !

Lösung: Wir müssen zeigen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|x-y_n| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$. Dies läßt sich auch umschreiben in die Ungleichungskette

$$x-\varepsilon < y_n < x+\varepsilon \; .$$

Da die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beide gegen x konvergieren, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so daß $|x-x_n| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_1$ sowie ein $n_2 \in \mathbb{N}$, so daß $|x-z_n| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_2$. Für $n \ge n_0 = \max(n_1, n_2)$ gelten beide Ungleichungen; wenn wir sie wie oben umschreiben, haben wir also die Ungleichungskette

$$x-\varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < x+\varepsilon \quad \text{für alle } n \ge n_0 \; .$$

Damit ist gezeigt, daß auch die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert.

c) Gilt auch die folgende Verallgemeinerung: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien drei Folgen reeller Zahlen derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \le y_n \le z_n$. Außerdem seien die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beide konvergent. Dann ist auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge und

$$\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n \le \lim_{n\to\infty} z_n \; .$$

Lösung: Wenn die beiden Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verschiedene Grenzwerte haben, spricht offenbar nichts dagegen, daß sich die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Bereich zwischen diesen Grenzwerten hin- und herbewegt ohne gegen einen Punkt zu bieten; die Behauptung sollte also falsch sein. Dies können wir am einfachsten dadurch zeigen, daß wir ein Gegenbeispiel konstruieren: Sei etwa

$$x_n = 1-\frac{1}{n}, \qquad y_n = \begin{cases} 1 & \text{für ungerade } n \\ 2 & \text{für gerade } n \end{cases} \qquad \text{und} \quad z_n = 2+\frac{1}{n} \; .$$

Offensichtlich ist $x_n < y_n < z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die Folge der x_n konvergiert gegen eins und die der y_n gegen zwei, aber die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbestimmt divergent.

d) Entscheiden Sie für jede der hier definierten reellen Zahlenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und so weiter, ob sie konvergent, bestimmt divergent oder unbestimmt divergent ist! Was können Sie im konvergenten Fall über den Grenzwert sagen?

$$x_n = \sqrt{n}, \quad y_n = \frac{n-1}{n+1}, \quad z_n = \frac{3(n+2)}{(n+1)^2}, \quad u_n = 1 + (-1)^n, \quad v_n = (-1)^n(2n+1)$$

Lösung: Die Folge mit $x_n = \sqrt{n}$ wächst offensichtlich unbegrenzt und divergiert daher bestimmt gegen ∞. Um das exakt zu beweisen, wählen wir eine reelle Zahl M und müssen zeigen, daß es dazu ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\sqrt{n} > M$ ist für alle $n \geq n_0$. Definieren wir n_0 als die kleinste natürliche Zahl größer M^2, gilt diese Ungleichung für alle $n \geq n_0$.

y_n können wir umschreiben als

$$y_n = \frac{n-1}{n+1} = \frac{(n+1)-2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}\,.$$

Da die Folge der Zahlen $1/n$ eine Nullfolge ist, gilt dasselbe auch für die um eins verschobene Folge mit Gliedern $1/(n+1)$ sowie deren Doppeltes $\big(2/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$; subtrahieren wir diese Folge von der konstanten Folge aus lauter Einsen, erhalten wir die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die somit gegen eins konvergiert.

Auch bei der Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird die Situation klarer durch Umschreiben:

$$z_n = \frac{3(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{3(n+1)+3}{(n+1)^2} = \frac{3}{n+1} + \frac{3}{(n+1)^2}\,.$$

Die Folge ist also die Summe zweier Nullfolgen und damit selbst eine Nullfolge.

$u_n = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{für ungerade } n \\ 2 & \text{für gerade } n \end{cases}$ definiert keine konvergente Folge: Würde sie nämlich gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergieren, gäbe es zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $|x - u_n|$ für alle $n \geq n_0$ kleiner wäre als ε. Unter den $n \geq n_0$ gibt es aber sowohl gerade als auch ungerade, also wäre

$$|x| < \frac{1}{2} \quad \text{d.h.} \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad |x-2| < \frac{1}{2} \quad \text{d.h.} \quad \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}\,.$$

Diese beiden Ungleichungen kann aber keine reelle Zahl gleichzeitig erfüllen. Somit ist die Folge nicht konvergent, und da sie nur die Werte 0 und 2 annimmt, kann sie auch nicht bestimmt divergent sein. Also ist sie unbestimmt divergent.

Auch die Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbestimmt divergent: Sie kann nicht gegen ein $x \in \mathbb{R}$ konvergieren, weil sonst z.B. ein n_0 geben müßte, so daß im offenen Intervall $(x-1, x+1)$ alle Zahlen der Form $(-1)^n(2n+1)$ mit $n \geq n_0$ liegen müßten, und sie ist auch nicht bestimmt divergent gegen ∞ oder $-\infty$, da es auch nur für beliebig große Indizes sowohl positive als auch negative Folgenglieder gibt.

e) Welche der hier definierten komplexen Zahlenfolgen ist konvergent, und wohin konvergiert sie gegebenenfalls?

$$x_n = \frac{1-i}{n} + \left(\frac{1}{1+i}\right)^n, \qquad y_n = 1 + i^n, \qquad z_n = \left(\frac{3-i}{2+i}\right)^n$$

Lösung: x_n ist aus zwei Termen zusammengesetzt, die wir am besten zunächst getrennt betrachten. Der erste Summand $(1-i)/n$ definiert offensichtlich eine Nullfolge, denn das ist ja einfach unser Standardbeispiel $1/n$ multipliziert mit der Konstanten $1-i$. Für den zweiten Term berechnen wir zunächst den Betrag der Basis:

$$\left|\frac{1}{1+i}\right| = \sqrt{\frac{1}{1+i}\cdot\frac{1}{1-i}} = \sqrt{\frac{1}{1+1}} = \sqrt{\frac{1}{2}} < 1\,.$$

Somit ist die Folge der Potenzen von $1/(1+i)$ eine Nullfolge, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine Summe zweier Nullfolgen und damit selbst eine Nullfolge.

Da i^n abwechselnd die Werte $i, -1, -i$ und 1 annimmt, ist auch die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ periodisch mit Periode vier; sie nimmt nacheinander jeweils die Werte $1+i, 0, 1-1$ und 2 an. Daß sie unbestimmt divergent ist, folgt genauso wie im Falle der Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der vorigen Aufgabe.

Die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schließlich ist eine Folge von Potenzen einer festen Zahl; wir müssen also deren Betrag berechnen:

$$\left|\frac{3-i}{2+i}\right| = \sqrt{\frac{3-i}{2+i}\cdot\frac{3+i}{2-i}} = \sqrt{\frac{9+1}{4+1}} = \sqrt{2} > 1\,.$$

Damit divergiert die Folge.

f) Welche der Folgen aus den beiden vorigen Aufgaben sind beschränkt? Welche der reellen Folgen sind monoton wachsend, welche monoton fallend?

Lösung: Beginnen wir mit den reellen Folgen! Wie wir gesehen haben divergiert die Folge $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ∞, ist also nicht beschränkt. Sie ist allerdings (sogar streng) monoton wachsend, denn ist $n > m$, so ist auch $\sqrt{n} > sqrtm$.

y_n hatten wir geschrieben als $1-2/(n+1)$; auch diese Folge ist streng monoton wachsend, denn ist $n > m$, so ist $2/(n+1) < 2/(m+1)$, also $1-2/(n+1) > 1-2/(m+1)$. Somit ist $y_1 = 0$ eine untere Schranke und der Grenzwert eins eine obere.

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Summe zweier monoton fallender Nullfolgen, also selbst monoton fallend. Die Folge ist auch beschränkt mit $z_1 = \frac{9}{4}$ als oberer und der Null als unterer Schranke.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pendelt ständig zwischen 0 und 2 hin- und her; damit ist 0 eine untere und 2 eine obere Schranke. Monotonie haben wir hier natürlich keine.

Auch die Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht monoton, da sie ja ständig zwischen positiven und negativen Zahlen hin- und herspringt; sie ist auch offensichtlich nicht beschränkt.

Bei den komplexen Folgen ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Nullfolge natürlich beschränkt; da $|1-i|$ gleich $\sqrt{2} < 2$ und damit $|1/(1-i| < 1$ ist, wäre zum Beispiel drei eine Schranke für den Betrag. y_n kann nur vier Werte annehmen, also ist die Folge beschränkt mit z.B. der Zwei als Schranke. Die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schließlich ist unbeschränkt.

g) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine konvergente Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit Grenzwert x. Zeigen Sie, daß dann die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = \sqrt{x_n}$ gegen $\sqrt{x}$ konvergiert!

Lösung: Wir betrachten zunächst den Fall $x = 0$. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$. so daß $|x_n| < \varepsilon^2$ für alle $n \geq n_0$. Damit ist auch $|y_n| = |\sqrt{x_n}| = \sqrt{x_n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, also konvergiert auch die Folge der Wurzeln gegen Null.

Um die beiden Folgen auch für $x > 0$ miteinander in Zusammenhang zu bringen, verwenden wir – wie so oft bei Wurzeln – die dritte binomische Formel:

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_n}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_n}\right) = x - x_n\,.$$

Damit ist

$$\left|\sqrt{x}-y_n\right| = \left|\sqrt{x}-\sqrt{x_n}\right| = \frac{|x-x_n|}{\left|\sqrt{x}+\sqrt{x_n}\right|} \leq \frac{|x-x_n|}{\sqrt{x}}\,.$$

Für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ verwenden wir nun zunächst die vorausgesetzte Konvergenz der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$; danach gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $|x - x_n| < \sqrt{x} \cdot \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Damit ist nach obiger Formel für diese n auch $\left|\sqrt{x} - y_n\right| < \varepsilon$.

h) Zeigen Sie: Ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen $z_n = x_n + iy_n$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, so konvergieren auch die reellen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$! Ist

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n \,?$$

Lösung: Das sollte eigentlich so sein, also versuchen wir, es zu beweisen. Der Grenzwert der Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei $z = x + iy$; es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$|z - z_n| = \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0\,.$$

Da $(x - x_n)^2$ und $(y - y^n)^2$ beide größer oder gleich null sind, folgt dann auch

$$\begin{aligned} |x - x_n| &= \sqrt{(x - x_n)^2} \leq \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} < \varepsilon \quad \text{und} \\ |y - y_n| &= \sqrt{(y - y_n)^2} \leq \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} < \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $n \geq n_0$. Also konvergiert die Folge der Realteile gegen den Realteil von z und die der Imaginärteile gegen den Imaginärteil.

i) Welche der folgenden Teilmenge von $\mathbb{R}$ sind nach oben, welche nach unten beschränkt? Bestimmen Sie, sofern es existiert, auch Infimum und Supremum der Menge!

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}, \qquad B = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}, \qquad C = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\},$$
$$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 5\}, \quad E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 5\}, \quad F = (0,\, 1) \cup (2,\, 3) \cup (4,\, 5), \quad G = \mathbb{N}_0$$

Lösung: Die endliche Menge A ist natürlich sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt; ihr kleinstes Element 2 ist gleichzeitig Infimum, ihr größtes Element 19 Supremum.

Da $0 < 1/n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, liegen alle Elemente von B zwischen null und eins. Für $n = 1$ erhalten wir die Null; damit kann es keine größere untere Schranke geben, und die Null ist das Infimum. Auch die obere Schranke 1 ist optimal, denn zwar gibt es kein $n \in \mathbb{N}$, so daß $1 - 1/n = 1$ wäre, aber jede obere Schranke M muß großer oder gleich eins sein, denn für jede reelle Zahl $M < 1$ ist $1 - M > 0$, es gibt also eine natürliche Zahl M, so daß $1 - M > 1/n$ ist, d.h. $1 - 1/n > M$. Somit ist die Eins das Supremum von B.

Bei C kommen zu den Elementen von B noch die Zahlen $1 + 1/n$ mit $n \in \mathbb{N}$ dazu; die größte unter diesen ist $2 = 1 + \frac{1}{1}$ das größte. Da alle Elemente von B kleiner eins sind, ist die Zwei somit eine obere Schranke und gleichzeitig das Supremum von C. Die Zahlen $1 + 1/n$ sind allesamt größer als eins; Infimum und insbesondere untere Schranke ist daher das Infimum von B, also die Null.

Für eine reelle Zahl x ist $x^2 < \sqrt{5}$ genau dann, wenn $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$ ist. Das gilt insbesondere auch für rationale Zahlen; also sind $\pm\sqrt{5}$ obere und untere Schranken von D. Da wir D als Teilmenge von $\mathbb{R}$ betrachten, sind das auch Infimum und Supremum.

Die Relation $x^2 > \sqrt{5}$ gilt genau dann, wenn $x < -\sqrt{5}$ oder $x > \sqrt{5}$ ist. Da es sowohl beliebig kleine als auch beliebig große rationale Zahlen gibt, die eine dieser Ungleichungen erfüllen, ist E weder nach oben noch nach unten beschränkt; insbesondere existieren weder Infimum noch Supremum.

F dagegen ist beschränkt: Alle Elemente $x \in F$ erfüllen die Ungleichung $0 < x < 5$. Die Schranken 0 und 5 sind auch Infimum und Supremum, denn natürlich gibt es zu jedem

$M > 0$ ein Element aus $(0, 1)$, das kleiner ist, z.B. $x = M/(M+1)$. Entsprechend gibt es für jedes $M < 5$ ein Element aus $(4, 5)$, das größer ist.

$G = \mathbb{N}_0$ hat natürlich die Null als untere Grenze und damit, da $0 \in \mathbb{N}_0$ auch als Infimum. Obere Schranken gibt es nicht, denn für jede reelle Zahl M gibt es eine natürliche Zahl $n > M$.

j) Die quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ habe zwei reelle Lösungen. Zeigen Sie: Diese Lösungen sind das Infimum und das Supremum der Menge

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + px + q < 0\}\,!$$

Lösung: Sind $a \leq b$ die beiden Nullstellen, so ist $x^2 + px + q = (x-a)(x-b)$; das ist negativ für $a < x < b$. Die angegebene Menge ist also gerade das offene Intervall (a, b), und dessen Infimum und Supremum sind natürlich a und b.

k) Sind sie auch Infimum und Supremum der Menge $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + px + q \geq 0\}$?

Lösung: Schreiben wir wieder $x^2 + px + q = (x-a)(x-b)$ mit $a \leq b$, so sehen wir, daß dies positiv ist, falls entweder $x < a$ oder $x > b$ ist. Die Menge aller reeller Zahlen, die kleiner als a oder größer als b sind, ist weder nach oben noch nach unten beschränkt; es gibt also weder Infimum noch Supremum.

l) Was passiert, wenn die Gleichung nur eine reelle Lösung hat?

Lösung: Bezeichnet c die Nullstelle, ist $x^2 + pq + q = (x-c)^2 \geq 0$ für alle x. Somit ist

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + px + q < 0\} = \emptyset \quad \text{und} \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + px + q \geq 0\} = \mathbb{R}\,.$$

Beide Mengen haben weder Infimum noch Supremum und haben im übrigen auch nichts mit c zu tun.