WOLFGANG K. SEILER	A5, ZIMMER C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 15.–17. Oktober 2012

a) Beweisen Sie die folgende *Vierecksungleichung:* Für vier reelle Zahlen $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ ist stets: $\big||x-y|-|z-w|\big| \le |x-z|+|y-w|$

b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien drei Folgen reeller Zahlen derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \le y_n \le z_n$. Zeigen Sie: Falls die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beide konvergent sind und denselben Grenzwert x haben, so ist auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x !

c) Gilt auch die folgende Verallgemeinerung: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien drei Folgen reeller Zahlen derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \le y_n \le z_n$. Außerdem seien die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beide konvergent. Dann ist auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge und

$$\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n \le \lim_{n\to\infty} z_n .$$

d) Entscheiden Sie für jede der hier definierten reellen Zahlenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und so weiter, ob sie konvergent, bestimmt divergent oder unbestimmt divergent ist! Was können Sie im konvergenten Fall über den Grenzwert sagen?

$$x_n = \sqrt{n}, \quad y_n = \frac{n-1}{n+1}, \quad z_n = \frac{3(n+2)}{(n+1)^2}, \quad u_n = 1 + (-1)^n, \quad v_n = (-1)^n(2n+1)$$

e) Welche der hier definierten komplexen Zahlenfolgen ist konvergent, und wohin konvergiert sie gegebenenfalls?

$$x_n = \frac{1-i}{n} + \left(\frac{1}{1+i}\right)^n, \qquad y_n = 1 + i^n, \qquad z_n = \left(\frac{3-i}{2+i}\right)^n$$

f) Welche der Folgen aus den beiden vorigen Aufgaben sind beschränkt? Welche der reellen Folgen sind monoton wachsend, welche monoton fallend?

g) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine konvergente Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit Grenzwert x. Zeigen Sie, daß dann die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = \sqrt{x_n}$ gegen $\sqrt{x}$ konvergiert!

h) Zeigen Sie: Ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen $z_n = x_n + iy_n$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, so konvergieren auch die reellen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$! Ist

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n \,?$$

i) Welche der folgenden Teilmenge von $\mathbb{R}$ sind nach oben, welche nach unten beschränkt? Bestimmen Sie, sofern es existiert, auch Infimum und Supremum der Menge!

$$A = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}, \qquad B = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}, \qquad C = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}\right\},$$
$$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 5\}, \quad E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 5\}, \quad F = (0,\,1) \cup (2,\,3) \cup (4,\,5), \quad G = \mathbb{N}_0$$

j) Die quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ habe zwei reelle Lösungen. Zeigen Sie: Diese Lösungen sind das Infimum und das Supremum der Menge

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + px + q < 0\}\,!$$

k) Sind sie auch Infimum und Supremum der Menge $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + px + q \ge 0\}$?

l) Was passiert, wenn die Gleichung nur eine reelle Lösung hat?