Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 8.–10. Oktober 2012

a) Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis: x, y seien zwei beliebige reelle Zahlen. Wir bilden das arithmetische Mittel $a = \frac{1}{2}(x + y)$; dann gilt offensichtlich $x - 2a = -y$ und auch $x = -y + 2a$. Multiplizieren wir die beiden linken Seiten dieser Gleichungen miteinander, muß das Ergebnis gleich dem Produkt der beiden rechten Seiten sein, d.h. $x^2 - 2ax = y^2 - 2ay$. Addieren wir auf beiden Seiten a^2, können wir jeweils die zweite binomische Formel anwenden und kommen auf $(x-a)^2 = (y-a)^2$. Somit ist $x-a = y-a$ und damit $x = y$.

Lösung: Aus $(x - a)^2 = (y - a)^2$ folgt nicht notwendigerweise, daß $x - a = y - a$ ist; stattdessen könnte auch $x - a = a - y$ sein, was hier auch der Fall ist.

b) Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis: x, y seien reelle Zahlen und $x = y$. Dann ist auch $x^2 = xy$, also $x^2 - y^2 = xy - y^2$. Nach der dritten binomischen Formel folgt, daß $(x + y)(x - y) = y(x - y)$ ist, also $x + y = y$. Wegen $x = y$ ist also $2y = y$ und damit $2 = 1$.

Lösung: Das Kürzen durch $x - y$ ist nur möglich, wenn dieser Term von der Null verschieden ist; hier ist aber $x = y$ vorausgesetzt.

c) Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis: Wir zeigen durch vollständige Indultion, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Für zwei natürliche Zahlen $a, b \le n$ ist $a = b$. Der Induktionsanfang ist klar: Für $n = 1$ muß $a = b = 1$ sein. Nun nehmen wir an, die Behauptung sei für ein $n \in \mathbb{N}$ bewiesen und betrachten zwei natürliche Zahlen a, b mit $a, b \le n + 1$. Da $a - 1$ und $b - 1$ beide kleiner oder gleich n sind, ist nach Induktionsannahme $a - 1 = b - 1$, also $a = b$. Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen, d.h. je zwei natürliche Zahlen sind gleich.

Lösung: Im Induktionsschritt müssen $a - 1$ und $b - 1$ keine natürlichen Zahlen sein, sondern können auch Null sein. Damit läßt sich die Induktionsannahme nicht anwenden.

d) Berechnen Sie in einem Gleitkommasystem mit drei Dezimalstellen in der Mantisse und Exponenten zwischen -3 und 3 die beiden Zahlen

$$x = (0{,}765 + 0{,}431) - (0{,}654 + 0{,}32) \quad \text{und} \quad y = (0{,}765 - 0{,}654) + (0{,}431 - 0{,}32)\,!$$

Runden Sie dabei, falls sich eine Zahl nicht exakt darstellen läßt, jeweils zur nächsten darstellbaren Zahl!

Lösung: Die vier Ausgangszahlen lassen sich allesamt exakt darstellen, sogar mit Exponent null. Weiter ist

$$0{,}765 + 0{,}431 = 1{,}196 \quad \text{und} \quad 0{,}654 + 0{,}32 = 0{,}974\,.$$

Das zweite Ergebnis ist in unserem System darstellbar, das erste muß auf $0{,}120 \cdot 10^1$ gerundet werden. Zur Berechnung von x müssen wir also 0,974 von $0,12 \cdot 10^1$ subtrahieren; das exakte Ergebnis ist 0,226, und das ist auch darstellbar. Somit ist $x = 0{,}226$.

Bei der Berechnung von y sind beide Klammern exakt darstellbar und gleich 0,111, also ist $y = 0{,}222$.

e) Wir bezeichnen auch eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von komplexen Zahlen c_n genau dann als Nullfolge, wenn es zu jedem (reellen) $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|c_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Welche der hier angegebenen Vorschriften definieren Nullfolgen?

$$a_n = \frac{3+4i}{n+5i}, \qquad b_n = \frac{1}{(3+4i)^n}, \qquad c_n = i^n, \qquad d_n = \frac{1}{n-i} - \frac{1}{n+i}$$

Lösung:

$$|a_n| = \left|\frac{3+4i}{n+5i}\right| = \frac{|3+4i|}{|n+5i|} = \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{\sqrt{n^2+5^2}} = \frac{5}{\sqrt{n^2+5}} < \frac{5}{\sqrt{n^2}} = \frac{5}{n}$$

ist kleiner als eine vorgegebene Zahl $\varepsilon > 0$, sobald $n > 5/\varepsilon$. Jedes $n_0 > 5\varepsilon$ erfüllt also die Forderung, d.h. wir haben eine Nullfolge.

$$|b_n| = \left|\frac{1}{(3+4i)^n}\right| = \frac{1}{|3+4i|^n} = \frac{1}{5^n} < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n},$$

da laut erstem Übungsblatt $n < 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wählen wir zu $\varepsilon > 0$ also ein $n_0 > 1/\varepsilon$, so ist $|b_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$; die Folge ist somit eine Nullfolge.

$|c_n| = |i^n| = |i|^n = 1$ wird nie kleiner als $\varepsilon = 1$, wir haben also keine Nullfolge. Die Folge ist periodisch und nimmt immer wieder die Werte $i, -1. -i, 1$ an.

$$d_n = \frac{1}{n-i} - \frac{1}{n+i} = \frac{(n+i)-(n-i)}{(n+i)(n-i)} = \frac{2i}{n^2+1}$$

hat Betrag $2/(n^2+1) < 2/n$. Wählen wir zu $\varepsilon > 0$ daher ein $n_0 > 2/\varepsilon$, so ist $|d_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, wir haben also eine Nullfolge.

f) Wir definieren für eine komplexe Zahl $z \neq 0$ *die* Quadratwurzel $\sqrt{z}$ von z als jene komplexe Zahl $w \in \mathbb{C}$ mit $w^2 = z$ und entweder $\Re w > 0$ oder $\Re w = 0$ und $\Im w > 0$. Zeigen Sie, daß stets genau ein w mit dieser Eigenschaft existiert!

Lösung: Für $z \neq 0$ hat die Gleichung $w^2 = z$ zwei Lösungen w_1, w_2 mit $w_2 = -w_1$. Falls der Realteil einer Lösung nicht verschwindet, hat die eine positiven und die andere negativen Realteil, es gibt also genau eine mit positivem. Falls $\Re w_1 = \Re w_2 = 0$ ist, muß wegen $z \neq 0$ und damit auch $w_i \neq 0$ der Imaginärteil von Null verschieden sein; damit hat eine der beiden Lösungen positiven, die andere negativen Imaginärteil.

g) Was ist $\sqrt{-i}$?

Lösung: Wie wir wissen, ist $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ eine Quadratwurzel von i, also ist

$$i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

eine Quadratwurzel von $-i$ und

$$\sqrt{-i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\,.$$

h) Ist stets $\sqrt{zw} = \sqrt{z} \cdot \sqrt{w}$?

Lösung: Nein: $\sqrt{-i} \cdot \sqrt{-i} = -i \neq \sqrt{-1} = i$.