Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 1. und 2. Oktober 2012

a) Welche der folgenden Vorschriften definiert eine Nullfolge?

$$a_n = \sqrt[n]{2}, \qquad b_n = \frac{1}{2^n}, \qquad c_n = \frac{n}{n^2+\sqrt{2}}, \qquad d_n = \frac{n}{n^2-222}$$

Lösung: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge: Gäbe es nämlich für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein n, so daß $|a_n| < \frac{1}{2}$ wäre

$$2 = a_n^n < \frac{1}{2^n} \le 1\,,$$

was offensichtlich nicht der Fall ist.

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dagegen ist eine Nullfolge, denn wie wir vom zweiten Übungsblatt wissen, ist $n < 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist

$$|b_n| = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

für alle $n \neq n_0$, wenn wir für n_0 irgendeine natürliche Zahl gröser $1/\varepsilon$ wählen.

Genauso können wir auch bei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vorgehen, denn auch

$$|c_n| = \frac{n}{n^2+\sqrt{2}} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}\,.$$

Für $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ müssen wir etwas mehr arbeiten: Für $n \ge 25$ (tatsächlich schon etwas früher) ist $n^2 > 2\cdot 222 = 444$, also $n^2/2 > 222$ und somit $n^2 - 222 > n^2/2$. Für $n \ge 25$ ist daher

$$|d_n| = \frac{n}{n^2-222} < \frac{n}{n^2/2} = \frac{2}{n}\,.$$

Wählen wir zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ daher ein $n_0 \ge 25$ aus $\mathbb{N}$, das größer ist als $2/\varepsilon$, so ist für $n \ge n_0$

$$|d_n| < \frac{2}{2/\varepsilon} = \varepsilon\,;$$

wir haben also eine Nullfolge.

b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sei eine Nullfolge, M eine reelle Zahl und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei irgendeine Folge reeller Zahlen mit $|c_n| \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, Zeigen Sie, daß dann auch $(a_nc_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist!

Lösung: Falls $M = 0$ ist, sind alle $c_n = 0$, und die Behauptung ist trivial. Sei also $M > 0$. (Warum kann der Fall $M < 0$ nicht eintreten?)

Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{für alle } n \ge n_0\,.$$

Für $n \ge n_0$ ist dann auch

$$|a_nc_n| = |a_n|\cdot|c_n| < \frac{\varepsilon}{M}\cdot M = \varepsilon\,,$$

was die Behauptung beweist.

c) Finden Sie eine Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen derart, daß $(a_nc_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *keine* Nullfolge ist!

Lösung: Wenn wir $a_n = 1/n$ und $c_n = n$ setzen, ist $a_nc_n = 1$ für alle n, und das ist natürlich keine Nullfolge: Für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gibt es kein n mit $|a_nc_n| < \varepsilon$.

d) Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = 2a_{2n}$.

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Da $2n > n$ ist, ist dann auch

$$|b_n| = |2a_{2n}| = 2\,|a_{2n}| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

e) Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = i(1-i), \quad z_2 = (3+i)(3-i), \quad z_3 = (i+1)(i-1),$$
$$z_4 = i^{2009}, \quad z_5 = \frac{5+2i}{2+3i}, \quad z_6 = \frac{4+i}{2-i}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
z_1 &= i(1-i) = i\cdot 1 - i\cdot i = i-(-1) = 1+i\\
z_2 &= (3+i)(3-i) = 3^2 - i^2 = 9-(-1) = 10\\
z_3 &= (i+1)(i-1) = i^2 - 1^2 = -1-1 = -2\\
z_4 &= i^{2009} = i\cdot i^{2008} = i\cdot (i^2)^{1004} = i\cdot(-1)^{1004} = i\\
z_5 &= \frac{5+2i}{2+3i} = \frac{(5+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{10-2\cdot(-3)-15i+4i}{2^2+3^2} = \frac{16}{13} - \frac{11}{13}i\\
z_6 &= \frac{4+i}{2-i} = \frac{(4+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{8-1+4i+2i}{2^2+1^2} = \frac{7}{5} + \frac{6}{5}i
\end{aligned}$$

f) Zeigen Sie: Für zwei komplexe Zahlen z, w ist $\overline{zw} = \overline{z}\cdot\overline{w}$!

Lösung: Wir schreiben $z = x+iy$ und $w = u+iv$. Dann ist $zw = (ux-vy)+(vx+uy)i$, also $\overline{zw} = (ux-vy)-(vx+uy)i$. F'ur die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung erhalten wir $\overline{z}\cdot\overline{w} = (x-iy)(u-iv) = (ux-vy)-(vx+uy)i$, also dasselbe Ergebnis. Damit ist die Formel bewiesen.

g) Zeigen Sie: Für zwei komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ ist $|zw| = |z|\,|w|$!

Lösung: Wir können den Betrag einer komplexen Zahl schreiben als Wurzel aus dem Produkt der Zahl mit ihrer konjugiert komplexen Zahl. Somit ist

$$|zw| = \sqrt{zw\cdot\overline{zw}} = \sqrt{z\cdot w\cdot\overline{z}\cdot\overline{w}} = \sqrt{z\cdot\overline{z}\cdot w\cdot\overline{w}} = \sqrt{z\cdot\overline{z}}\cdot\sqrt{w\cdot\overline{w}} = |z|\cdot|w|\ ,$$

wobei wir das Ergebnis der vorigen Aufgabe sowie das Kommutativgesetz der Multiplikation benutzt haben.

Alternativ läßt sich das auch direkt nachrechen: Da Beträge immer größer oder gleich Null sind, genügt es zu zeigen, daß die Quadrate der beiden Seiten gleich sind. Für $z = x+iy$ und $w = u+iv$ ist $zw = (xu-yv)+(xv+yu)i$, also

$$\begin{aligned}
|zw|^2 &= (xu-yv)^2 + (xv+yu)^2 = x^2u^2 - 2xyuv + y^2v^2 + x^2v^2 + 2xyuv + y^2u^2\\
&= x^2u^2+y^2v^2+x^2v^2+y^2u^2 = x^2(y^2+v^2)+y^2(v^2+u^2) = (x^2+y^2)(u^2+v^2) = |z|^2\,|w|^2\ .
\end{aligned}$$

h) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 = -1$!

Lösung: Wir wissen, daß $z = -1$ eine Lösung ist, also können wir durch $z+1$ dividieren:

$$\begin{array}{l} (z^3 + 1) \ : \ (z + 1) = z^2 - z + 1 \\ \underline{z^3 + z^2} \\ \quad - z^2 + 1 \\ \quad \underline{- z^2 - z} \\ \qquad\quad z + 1 \end{array}$$

Somit ist $(z^3+1) = (z+1)(z^2-z+1)$, und wir müssen noch die Nullstellen des zweiten Faktors bestimmen. Das ist eine quadratische Gleichung, die sich in der üblichen Weise lösen läßt:

$$z^2 - z + 1 = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$

gilt genau dann, wenn

$$z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}\,i}{2}\,.$$

Zusammen mit $z = -1$ sind das die sämtlichen Lösungen.

Alternative: Wir können auch genauso vorgehen wie im Skriptum bei der Lösung der Gleichung $z^3 = 1$: Wir machen den Ansatz $z = x + yi$; dann ist

$$z^3(x+yi)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot yi + 3x \cdot (yi)^2 + (yi)^3 = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i$$

genau dann gleich minus eins, wenn

$$x^3 - 3xy^2 = -1 \quad \text{und} \quad 3x^2y - y^3 = y(3x^2 - y^2) = 0$$

ist. Die zweite Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $y = 0$ oder $y^2 = 3x^2$ ist.

$y = 0$ in die erste Gleichung eingesetzt führt auf $x^3 = -1$, also (da x eine reelle Zahl ist) $x = -1$. Die Wurzel $x + iy = 1$ ist in diesem Fall also einfach die wohlbekannte reelle Kubikwurzel.

Setzen wir $y^2 = 3x^3$ in die erste Gleichung ein, erhalten wir die Gleichung $-8x^3 = -1$ mit der Lösung $x = \frac{1}{2}$. Wegen $y^2 = 3x^2$ gibt es für y somit die beiden Möglichkeiten $\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$, die dritten Wurzeln von -1 sind also

$$-1, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\,.$$

weitere Alternative: Wir hätten uns die ganze Rechnung sparen können, indem wir das Ergebnis aus dem Skriptum benutzen: Die Gleichung $z^3 = 1$ ist äquivalent zu $(-z)^3 = -1$. Sie hat die drei Lösungen

$$z = 1, \quad z = \rho = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i \quad \text{und} \quad z = \bar{\rho} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\,.$$

Daher hat die Gleichung $z^3 = -1$ die drei Lösungen

$$z = -1, \quad z = -\rho = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i \quad \text{und} \quad z = -\bar{\rho} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\,.$$

i) Finden Sie alle komplexen Zahlen z mit $z^2 = 3 + 4i$!

Lösung: Wir schreiben $z = x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$; laut Vorlesung ist dann im Falle $z^2 = a+ib$

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a} \quad \text{und} \quad y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}\,,$$

wobei die beiden Vorzeichen so gewählt werden müssen, daß xy dasselbe Vorzeichen wie b hat.

Hier ist $a = 3$ und $b = 4$, also müssen x und y dasselbe Vorzeichen haben. Weiter ist

$$\begin{aligned} x &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{3^2+4^2}+3} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{25}+3} \\ &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{8} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\sqrt{2} = \pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \pm 2\,. \end{aligned}$$

Da $2xy = b = 4$ sein muß, also $xy = 2$, ist somit $y = \pm 1$. Die beiden Lösungen sind also $z = 2 + i$ und $z = -2 - i$.

j) Lösen Sie die quadratische Gleichung $x^2 - 6x + 25 = 0$!

Lösung: Durch quadratische Ergänzung wird die Gleichung zu $(x-3)^2 = -16$, die Lösungen sind also $x = 3 \pm 4i$.

(Wer die Lösungsformel für quadratische Gleichungen auswendig kennt, kann natürlich auch da einsetzen.)

k) Lösen Sie die quadratische Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$!

Lösung: Quadratische Ergänzung führt auf die Gleichung

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}\,,$$

also ist

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}\,i}{2}\,.$$

l) Lösen Sie die quadratische Gleichung $x^2 + 3ix + 4 = 0$!

Lösung: Verwenden wir hier zur Abwechslung einmal die Lösungsformel: Mit $p = 3i$ und $q = 4$ ist

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{3i}{2} \pm \sqrt{\frac{(3i)^2}{4} - 4} = -\frac{3i}{2} \pm \sqrt{\frac{-9}{4} - 4} = -\frac{3i}{2} \pm \sqrt{-\frac{25}{4}} = -\frac{3i}{2} \pm \frac{5i}{2}\,.$$

Somit ist $x = i$ oder $x = -4i$.

m) $n \in \mathbb{N}$ sei eine natürliche Zahl und A, B seien zwei Mengen mit jeweils n Elementen. Zeigen Sie: Jede injektive Abbildung $f\colon A \to B$ ist bijektiv!

Lösung: Wir müssen zeigen, daß f auch surjektiv ist, daß es also zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$. Das ist gleichbedeutend damit, daß die Menge

$$C = \big\{ b \in M \bigm| \text{Es gibt ein } a \in A \text{ mit } f(a) = b \big\} = \big\{ f(a) \bigm| a \in A \big\}$$

bereits ganz B ist. Sie ist offensichtlich eine Teilmenge von B; wir müssen zeigen, daß sie gleich B ist.

Wegen der Injektivität von f sind die Elemente $f(a)$ allesamt verschieden, die Menge C hat also n Elemente. Da sie Teilmenge der n-elementigen Menge B ist, muß sie daher gleich B sein, und wir sind fertig.

Alternativ läßt sich die Behauptung auch durch Widerspruch beweisen: Angenommen, die Abbildung wäre nicht bijektiv. Da sie als injektiv vorausgesetzt ist, kann das nur bedeuten, daß sie nicht surjektiv ist; es gibt also mindestens ein Element $b \in B$, das kein Urbild hat. Damit können wir aus f auch eine Abbildung $A \to B \setminus \{b\}$ von der n-elementigen Menge A nach der $(n-1)$-elementigen Menge $B \setminus \{b\}$ machen. An der Injektivität von f ändert sich natürlich nichts, wenn wir aus B ein Element herausnehmen.

Nun ist es aber unmöglich, eine Menge A von n Elementen injektiv abzubilden auf eine Menge von $n-1$ Elementen, denn da alle Elemente von A verschiedene Bilder haben, sind allein das schon n Elemente. Daher kann die Annahme, f sei nicht bijektiv, nicht richtig sein.

(Diese Art von Schluß bezeichnet man als das DIRICHLETsche *Schubfachprinzip:* Verteilt man n Gegenstände auf $n-1$ Schubfächer, so muß mindestens eines davon mehr als einen der Gegenstände enthalten.)

n) $n \in \mathbb{N}$ sei eine natürliche Zahl und A, B seien zwei Mengen mit jeweils n Elementen. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß es $n!$ bijektive Abbildungen $f: A \to B$ gibt! Dabei steht $n!$ (gesprochen n Fakultät) für das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen.

Lösung: Der *Induktionsanfang* $n = 1$ ist klar: Da das Produkt der ersten eins natürlichen Zahlen einfach gleich eins ist, müssen wir zeigen, daß es für zwei einelementige Mengen $A = \{a\}$ und $B = \{b\}$ genau eine bijektive Abbildung $f: A \to B$ gibt. Offensichtlich gibt es überhaupt nur eine Abbildung $f: A \to B$, denn für $f(a)$ gibt es nur die eine Möglichkeit $f(a) = b$, und damit ist die Abbildung festgelegt. Sie ist surjektiv, da a ein Urbild von b ist, und auch injektiv, denn damit zwei verschiedene Elemente auf dasselbe Element abgebildet werden können, müßte es erst einmal zwei verschiedene Elemente geben.

Zum *Induktionsschluß* nehmen wir an, die Behauptung sei richtig für ein $n \in \mathbb{N}$ und betrachten zwei Mengen A, B mit jeweils $n+1$ Elementen. Da sich unsere Induktionsvoraussetzung nur auf n-elementige Mengen bezieht, wählen wir ein Element $a \in A$ aus; dann ist $A^* = A \setminus \{a\}$ eine Menge mit n Elementen. Eine Abbildung $f: A \to B$ bildet a ab auf eines der $n+1$ Elemente von B. Wenn f bijektiv sein soll, kann wegen der Injektivität keines des Elemente von A^* auf $f(a)$ abgebildet werden, f bildet also die n Elemente von A^* bijektiv ab auf die n Elemente der Menge $B \setminus \{f(a)\}$. Dafür gibt es nach Induktionsvoraussetzung $n!$ Möglichkeiten. Diese $n!$ Möglichkeiten haben wir für jede der $n+1$ möglichen Wahlen von $f(a)$, also gibt es $n! \cdot (n+1) = (n+1)!$ bijektive Abbildungen von A nach B, wie gewünscht.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gibt es somit für jede natürliche Zahl n genau $n!$ bijektive Abbildungen zwischen zwei n-elementigen Mengen A, B.

o) Zeigen Sie: Die Menge $U \subset \mathbb{N}$ aller ungerader natürlicher Zahlen ist gleichmächtig zur Menge $G \subset \mathbb{N}$ aller gerader natürlicher Zahlen!

Lösung: Für jede ungerade Zahl $u \in U$ ist $u+1$ eine gerade Zahl aus G. Die Abbildung

$$f: \begin{cases} U \to G \\ u \mapsto u+1 \end{cases}$$

ist injektiv, denn aus $u+1 = v+1$ folgt $u = v$; sie ist auch surjektiv, denn für jede gerade Zahl $g \in G$ ist $g-1$ ungerade und wegen $g \geq 2$ auch ein Element von U. Somit sind U und G gleichmächtig.