Wolfgang K. Seiler — A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 1. und 2. Oktober 2012

a) Welche der folgenden Vorschriften definiert eine Nullfolge?

$$a_n = \sqrt[n]{2}, \qquad b_n = \frac{1}{2^n}, \qquad c_n = \frac{n}{n^2+\sqrt{2}}, \qquad d_n = \frac{n}{n^2-222}$$

b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sei eine Nullfolge, M eine reelle Zahl und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei irgendeine Folge reeller Zahlen mit $|c_n| \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, Zeigen Sie, daß dann auch $(a_n c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist!

c) Finden Sie eine Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen derart, daß $(a_n c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *keine* Nullfolge ist!

d) Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = 2a_{2n}$.

e) Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = i(1-i), \quad z_2 = (3+i)(3-i), \quad z_3 = (i+1)(i-1),$$
$$z_4 = i^{2009}, \quad z_5 = \frac{5+2i}{2+3i}, \quad z_6 = \frac{4+i}{2-i}$$

f) Zeigen Sie: Für zwei komplexe Zahlen z, w ist $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$!

g) Zeigen Sie: Für zwei komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ ist $|zw| = |z|\,|w|$!

h) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 = -1$!

i) Finden Sie alle komplexen Zahlen z mit $z^2 = 3+4i$!

j) Lösen Sie die quadratische Gleichung $x^2 - 6x + 25 = 0$!

k) Lösen Sie die quadratische Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$!

l) Lösen Sie die quadratische Gleichung $x^2 + 3ix + 4 = 0$!

m) $n \in \mathbb{N}$ sei eine natürliche Zahl und A, B seien zwei Mengen mit jeweils n Elementen. Zeigen Sie: Jede injektive Abbildung $f\colon A \to B$ ist bijektiv!

n) $n \in \mathbb{N}$ sei eine natürliche Zahl und A, B seien zwei Mengen mit jeweils n Elementen. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß es $n!$ bijektive Abbildungen $f\colon A \to B$ gibt! Dabei steht $n!$ (gesprochen n Fakultät) für das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen.

o) Zeigen Sie: Die Menge $U \subset \mathbb{N}$ aller ungerader natürlicher Zahlen ist gleichmächtig zur Menge $G \subset \mathbb{N}$ aller gerader natürlicher Zahlen!

Teilnehmer der Mittwochsgruppen sollten diese Woche eine der anderen Übungsgruppen besuchen