WOLFGANG K. SEILER A5, ZIMMER C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 24–26. September 2012

a) Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = a_n + a_{n+1}$!

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir müssen zeigen, daß es dazu ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|b_n| < \varepsilon$ ist für alle $n \geq n_0$.
Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, gibt es auf jeden Fall eine natürliche Zahl n_0, so daß $|a_n| < \varepsilon/2$ ist für alle $n \geq n_0$. Insbesondere ist also für $n \geq n_0$ auch $|a_{n+1}| \leq \varepsilon/2$, denn natürlich ist auch $n+1 \geq n_0$. Somit ist für $n \geq n_0$ auch

$$|b_n| = |a_n + a_{n+1}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Dies zeigt, daß $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

b) Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so auch $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = 2a_n + 3a_{n+1}$!

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir müssen zeigen, daß es dazu ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|c_n| < \varepsilon$ ist für alle $n \geq n_0$.
Ist $|a_n| < \varepsilon$ und $|a_{n+1}| < \varepsilon$, so ist

$$|c_n| = |2a_n + 3a_{n+1}| \leq |2a_n| + |3a_{n+1}| = 2\,|a_n| + 3\,|a_{n+1}| \leq 2\varepsilon + 3\varepsilon = 5\varepsilon\,.$$

Daher nutzen wir die Nullfolgeneigenschaft von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so aus, daß wir folgern: Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $|a_n| < \varepsilon/5$ für alle $n \geq n_0$. Für diese n ist dann auch $|a_{n+1}| \leq \varepsilon/5$, also ist

$$|c_n| = |2a_n + 3a_{n+1}| \leq 2\,|a_n| + 3\,|a_{n+1}| < \frac{2\varepsilon}{5} + \frac{3\varepsilon}{5} = \varepsilon\,.$$

Dies zeigt, daß $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

c) Zeigen Sie: Ist $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung über $\mathbb{R}$ mit $a_1 > 0$, so ist auch $\left(\left[\sqrt{a_n}, \sqrt{b_n}\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung.

Lösung: Wir müssen zwei Dinge zeigen: Als erstes muß für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Intervall $\left[\sqrt{a_{n+1}}, \sqrt{b_{n+1}}\right]$ im Intervall $\left[\sqrt{a_n}, \sqrt{b_n}\right]$ liegen, d.h. die Ungleichung

$$\sqrt{a_n} \leq \sqrt{a_{n+1}} \leq \sqrt{b_{n+1}} \leq \sqrt{b_n}$$

muß erfüllt sein. Da $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist, wissen wir jedenfalls, daß $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ ist; außerdem ist $a_1 > 0$, also erst recht $a_n > 0$. Daher reicht es zu zeigen, daß für zwei reelle Zahlen x, y mit $0 < x \leq y$ auch $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ ist. Wäre $\sqrt{x} > \sqrt{y}$, so wäre auch

$$x = \sqrt{x}\cdot\sqrt{x} > \sqrt{x}\cdot\sqrt{y} > \sqrt{y}\cdot\sqrt{y} = y\,,$$

im Widerspruch zur Annahme.
Als zweites müssen wir zeigen, daß die Folge der $\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}$ eine Nullfolge ist. Wir wissen, daß die Folge der $b_n - a_n$ eine Nullfolge ist, und nach der dritten binomischen Formel ist

$$b_n - a_n = \left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n}\right)\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right),$$

also ist

$$\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right) = \frac{b_n - a_n}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n}} \leq \frac{b_n - a_n}{\sqrt{a_n}} \leq \frac{b_n - a_n}{\sqrt{a_1}}\,,$$

denn $\sqrt{a_1} \leq \sqrt{a_n} \leq \sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}$.

Zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so daß $|b_n - a_n| < \sqrt{a_1}\,\varepsilon$ ist für alle $n \geq n_0$. Für diese n ist daher auch

$$\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right) \leq \frac{b_n - a_n}{\sqrt{a_1}} \leq \frac{\sqrt{a_1}\,\varepsilon}{\sqrt{a_1}} = \varepsilon\,,$$

die Folge $\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine Nullfolge.

d) Berechnen Sie die Intervalle $[1, 2] + [-2, -1]$, $[1, 2] - [-2, -1]$ und $[1, 2] \cdot [-2, -1]$!

Lösung: Bei der Addition von Intervallen können wir einfach die Schranken addieren; daher ist $[1, 2] + [-2, -1] = [-1, 1]$.
Die Subtraktion können wir auf eine Addition zurückführen, denn für alle $x \in [-2, -1]$ ist $-x \in [1, 2]$ und umgekehrt. Somit ist

$$[1, 2] - [-2, -1] = [1, 2] + [1, 2] = [2, 4]\,.$$

Für die Multiplikation schließlich müssen wie die vier Produkte aus Schranken verschiedener Intervalle betrachten:

$$1 \cdot (-2) = -2, \quad 1 \cdot (-1) = -1, \quad 2 \cdot (-2) = -4 \quad \text{und} \quad 2 \cdot (-1) = -2\,.$$

Das kleinste dieser Produkte ist -4, das größte -1, also ist

$$[1, 2] \cdot [-2, -1] = [-4, -1]\,.$$

e) Geben Sie eine Intervallschachtelung an für die reelle Zahl $\sqrt{2} + \sqrt{3}$!

Lösung: Mit dem Algorithmus von HERON können wir uns leicht Intervallschachtelungen $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ zu $\sqrt{2}$ und $([c_n, d_n])_{n\in\mathbb{N}}$ zu $\sqrt{3}$ verschaffen. Konkret können wir nach HERON etwa von zwei Zahlen $b_0 = d_0 = 1$ ausgehen und für $n \geq 1$ definieren

$$b_n = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{2}{b_n}\right), \quad a_n = \frac{2}{b_n}, \quad d_n = \frac{1}{2}\left(d_n + \frac{3}{d_n}\right), \quad c_n = \frac{3}{d_n}\,.$$

Dann ist $([a_n + c_n, b_n + d_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung für $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

f) Finden Sie eine Intervallschachtelung mit endlichen Dezimalbrüchen als Grenzen für die Zahl $\dfrac{1}{11}$!

Lösung: Die Dezimaldarstellung von $1/11$ ist periodisch und gleich $0{,}\overline{09}$. Eine Intervallschachtelung erhalten wir dadurch, daß wir für die untere Schranke einfach nach einer gewissen Anzahl von Ziffern abbrechen und für die obere eine Einheit der letzten Dezimalstelle addieren. Konkret könnten wir zum Beispiel die Intervalle

$$[0{,}09,\ 0{,}1], \quad [0{,}0909,\ 0{,}091], \quad [0{,}090909,\ 0{,}09091], \quad [0{,}09090909,\ 0{,}0909091], \quad \ldots$$

betrachten. Formal läßt sich dies definieren als die Folge von Intervallen $[a_n, b_n]$ mit

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{9}{100^i} \quad \text{und} \quad b_n = a_n + \frac{1}{100^n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{9}{100^i} + \frac{1}{10^{2n-1}}\,.$$

g) Wie können Sie eine Intervallschachtelung finden für die beiden Lösungen

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{Q}$?

Lösung: Falls $p^2 - 4q$ negativ ist, gibt es keine Lösungen und wir können daher auch keine Intervallschachtelung dafür finden.

Falls $p^2 - 4q$ verschwindet, gibt es nur die eine Lösung $-p/2$; eine Intervallschachtelung dafür wäre etwa die Folge der Intervalle

$$\left[-\frac{p}{2},\ -\frac{p}{2}\right] \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Falls $p^2 - 4q$ positiv ist, können wir uns zunächst nach HERON eine Intervallschachtelung $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ für die Wurzel aus dieser Zahl verschaffen. Die Intervallschachtelung für die negative Wurzel ist dann $([-b_n, -a_n])_{n\in\mathbb{N}}$ und für die beiden Lösungen haben wir entsprechend die Folge der Intervalle

$$\left[-\frac{p}{2} + \frac{a_n}{2},\ -\frac{p}{2} + \frac{b_n}{2}\right] \quad \textit{bzw.} \left[-\frac{p}{2} - \frac{b_n}{2},\ -\frac{p}{2} - \frac{a_n}{2}\right]\,.$$

h) Zeigen Sie: $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$!

Lösung: Nach der ersten binomischen Formel ist $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+3 = 5+2\sqrt{6}$. Da $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ positiv ist, folgt die Behauptung.

i) Richtig oder falsch: $\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$

Lösung: Hier ist $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = 2 - 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3 = 5 - 2\sqrt{6}$. Da $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ negativ ist, $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ aber positiv, ist die Gleichung trotzdem falsch; tatsächlich ist

$$\sqrt{2} - \sqrt{3} = -\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \quad \text{und} \quad \sqrt{3} - \sqrt{2} = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\,.$$

j) Zeigen Sie: $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}$!

Lösung: Mit den Formeln aus den letzten beiden Aufgaben folgt das natürlich sofort:

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = (\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{3}\,.$$

Will man die Formel direkt beweisen, muß man zunächst die linke Seite quadrieren:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right)^2 &= 5 + 2\sqrt{6} + 2 \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + 5 - 2\sqrt{6} \\ &= 10 + 2\sqrt{(5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6})} = 10 + 2\sqrt{25 - 4 \cdot 6} = 12\,.\end{aligned}$$

Da $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ positiv ist, folgt

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}\,.$$

k) Vereinfachen Sie die Ausdrücke $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}}$ und $\dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$!

Lösung: Im ersten Fall erweitern wir den Bruch mit $\sqrt{2} - 1$ und erhalten

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{2} - \sqrt{5} - 1}{2 - 1} = \sqrt{10} + \sqrt{2} - \sqrt{5} - 1\,.$$

Beim zweiten Ausdruck erweitern wir entsprechend mit $\sqrt{5} + \sqrt{2}$:

$$\frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})} = \frac{5 + 2\sqrt{10} + 2}{5 - 2} = \frac{7}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{10}\,.$$

l) Zeigen Sie mit Hilfe der zweiten binomischen Formel, daß für zwei positive Zahlen a, b das geometrische Mittel $\sqrt{ab}$ nicht größer als das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}(a + b)$ sein kann und daß die beiden nur im Fall $a = b$ gleich sind!

Lösung: Die zweite binomische Formel für a und b bringt offensichtlich nichts; irgendwie müssen auch Wurzeln ins Spiel kommen. Probieren wir es mit

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b\,.$$

Als Quadrat muß dies größer oder gleich Null sein, also ist

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \quad \text{oder} \quad a + b \geq 2\sqrt{ab}\,.$$

Dividieren wir diese Ungleichung noch durch zwei, haben wir die gewünschte Relation

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\,.$$

Falls hier ein Gleichheitszeichen steht, muß auch $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = 0$ sein, also $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ und damit $a = b$. Umgekehrt ist im Falle $a = b$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a^2} = a = \frac{a+b}{2}\,,$$

das geometrische Mittel ist also gleich dem arithmetischen.

m) Zeigen Sie: $\dfrac{a+b\sqrt{3}}{a-b\sqrt{3}}$ ist für zwei nicht gleichzeitig verschwindende rationale Zahlen a, b genau dann rational, wenn ab verschwindet.

Lösung:

$$\frac{a+b\sqrt{3}}{a-b\sqrt{3}} = \frac{(a+b\sqrt{3})^2}{(a-b\sqrt{3})(a+b\sqrt{3})} = \frac{a^2+3b^2}{a^2-3b^2} + \frac{2ab}{a^2-3b^2}\sqrt{3}\,.$$

Falls ab verschwindet, ist dies gleich dem offensichtlich rationalen ersten Summanden. Wäre die Zahl auch für irgendwelche Werte $ab \neq 0$ rational, etwa gleich dem Bruch $\frac{p}{q}$, so könnten wir die Gleichung

$$\frac{a^2+3b^2}{a^2-3b^2} + \frac{2ab}{a^2-3b^2}\sqrt{3} = \frac{p}{q}$$

nach $\sqrt{3}$ auflösen und hätten $\sqrt{3}$ als rationale Zahl dargestellt, was nicht geht.
(Das Argument ist wie bei PLATON: Wäre $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ eine Darstellung als gekürzter Bruch, so wäre $p^2 = 3q^2$, also p^2 durch drei teilbar. Wäre p selbst nicht durch drei teilbar, so könnten wir $p = 3r + a$ schreiben mit $a \in \{1, 2\}$. Dann hätte $p^2 = 9r^2 + 6ra + a^2$ bei der Divison durch drei den gleichen Rest wie $a^2 \in \{1, 4\}$, also eins, wäre also nicht durch 3 teilbar. Somit läßt sich p darstellen als $p = 3r$ und $3q^2 = p^2 = 9r^2$. Dies zeigt, daß $q^2 = 3r^2$ durch drei teilbar ist, also auch q. Dann ist $\frac{p}{q}$ aber kein gekürzter Bruch.)