

## Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 24–26. September 2012

- a) Zeigen Sie: Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge, so auch  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $b_n = a_n + a_{n+1}$ !
- b) Zeigen Sie: Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge, so auch  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $c_n = 2a_n + 3a_{n+1}$ !
- c) Zeigen Sie: Ist  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$  eine Intervallschachtelung über  $\mathbb{R}$  mit  $a_1 > 0$ , so ist auch  $([\sqrt{a_n}, \sqrt{b_n}])_{n \in \mathbb{N}}$  eine Intervallschachtelung.
- d) Berechnen Sie die Intervalle  $[1, 2] + [-2, -1]$ ,  $[1, 2] - [-2, -1]$  und  $[1, 2] \cdot [-2, -1]$ !
- e) Geben Sie eine Intervallschachtelung an für die reelle Zahl  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ !
- f) Finden Sie eine Intervallschachtelung mit endlichen Dezimalbrüchen als Grenzen für die Zahl  $\frac{1}{11}$ !
- g) Wie können Sie eine Intervallschachtelung finden für die beiden Lösungen

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

der quadratischen Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  mit  $p, q \in \mathbb{Q}$ ?

- h) Zeigen Sie:  $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ !
- i) *Richtig oder falsch:*  $\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$
- j) Zeigen Sie:  $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}$ !
- k) Vereinfachen Sie die Ausdrücke  $\frac{1 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}}$  und  $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ !
- l) Zeigen Sie mit Hilfe der zweiten binomischen Formel, daß für zwei positive Zahlen  $a, b$  das geometrische Mittel  $\sqrt{ab}$  nicht größer als das arithmetische Mittel  $\frac{1}{2}(a + b)$  sein kann und daß die beiden nur im Fall  $a = b$  gleich sind!
- m) Zeigen Sie:  $\frac{a + b\sqrt{3}}{a - b\sqrt{3}}$  ist für zwei nicht gleichzeitig verschwindende rationale Zahlen  $a, b$  genau dann rational, wenn  $ab$  verschwindet.