Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 17–19. September 2012

a) Zeigen Sie, daß es keine rationale Zahl x gibt mit $x^2 = 10$!

Lösung: Angenommen, es gäbe so eine rationale Zahl x. Wir schreiben sie als $x = \frac{p}{q}$ mit zueinander teilerfremden Zahlen p, q. Da $p^2/q^2 = 10$ ist, ist $p^2 = 10q^2$ eine Zehnerzahl. Das Quadrat einer ganzen Zahl, die nicht durch zehn teilbar ist, kann unmöglich eine Zehnerzahl sein, da ihre letzte Ziffer $1, 4, 5, 6$ oder 9 sein muß. Daher muß p selbst durch zehn teilbar sein; es gibt also ein $r \in \mathbb{Z}$ mit $p = 10r$. Dann ist

$$p^2 = (10r)^2 = 100r^2 = 10q^2, \quad \text{also} \quad q^2 = 10r^2 .$$

Also ist auch q^2 eine Zehnerzahl, und damit, wie wir uns gerade überlegt haben, q selbst. Die beiden teilerfremden Zahlebn p und q können aber unmöglich beide durch zehn teilbar sein; daher führt die Annahme, es gebe eine rationale Zahl x mit $x^2 = 10$, zu einem Widerspruch.

b) Zeigen Sie, daß es keine rationale Zahl x gibt mit $x^3 = 5$!

Lösung: $x = p/q$ sei die gekürzte Darstellung einer rationalen Zahl mit $x^3 = 5$. Dann ist also $p^3/q^3 = 5$, d.h. $p^3 = 5q^3$. Somit ist p^3 durch fünf teilbar, also auch p. Wir können daher eine natürliche Zahl r finden mit $p = 5r$ und $p^3 = 5^3r^3$. Also ist $5^3r^3 = 5q^3$ und damit $q^3 = 5^2r^2$ durch 25. Das ist nur möglich, wenn q mindestens durch fünf teilbar ist, im Widerspruch zur Annahme, daß p/q ein gekürzter Bruch war. Also gibt es keine rationale Zahl x mit $x^3 = 5$.

c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß die Summe der ersten n Quadratzahlen nach der Formel

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

berechnet werden kann!

Lösung: *Induktionsanfang:* Für $n = 1$ ist die Summe der ersten n Quadratzahlen $1^2 = 1$ und

$$\frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1 ,$$

die Behauptung ist also richtig.
Induktionsschritt: Angenommen, wir wissen daß für eine gewisse natürliche Zahl n gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big)}{6} \\ &= \frac{(n+1)\big(2n^2 + n + 6n + 6\big)}{6} = \frac{(n+1)\big(2n^2 + 7n + 6\big)}{6} .\end{aligned}$$

Wir müssen zeigen, daß dies mit

$$\frac{(n+1)(n+2)\big(2(n+1)+1\big)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

übereinstimmt, was offensichtlich der Fall ist.

(Wir hätten die Zähler natürlich auch vollständig ausmultiplizieren können; wer das tut wird aber schnell feststellen, daß die Rechnung durch das Ausklammern des gemeinsamen Faktors $(n+1)$ deutlich einfacher wurde.)

d) Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgende Abschwächung der BERNOULLIschen Ungleichung:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \geq -1\,.$$

Lösung: *Induktionsanfang:* Für $n = 1$ müssen wir die Ungleichung $(1+x)^1 \geq 1+1\cdot x$ beweisen; sie ist trivialerweise richtig, denn auf beiden Seiten steht einfach $1+x$.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, die Behauptung sei für ein festes $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. Wir müssen zeigen, daß dann auch gilt $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ für alle $x \geq -1$.

Wir schreiben $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x)$. Nach der Induktionsannahme ist der erste Faktor $(1+x)^n \geq (1+nx)$. Der zweite Faktor $1+x$ ist für $x > -1$ positiv; daher können wir in diesem Fall die Ungleichung damit multiplizieren und erhalten

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)\cdot(1+x)\,.$$

Diese Ungleichung gilt auch für $x = -1$, denn dann steht auf beiden Seiten die Null. Weiter ist

$$(1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x\,,$$

denn $x^2 \geq 0$ für alle x. Somit ist $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ für alle $x \geq -1$.

Dieser Schluß funktioniert für alle $n \in \mathbb{N}$; nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist daher $(1+x)^n \geq 1+nx$ für alle $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

e) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}\,!$$

Lösung: Wir können die Behauptung zum Beispiel durch vollständige Induktion beweisen: Als *Induktionsanfang* haben wir für $n = 1$ die Behauptung

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} & = & 1-\dfrac{1}{2} \\ \| & & \| \\ \dfrac{1}{1\cdot 2} & = & \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Zum *Induktionsschritt* nehmen wir an, die Behauptung sei für ein festes $n \in \mathbb{N}$ richtig und versuchen, sie auch für $n+1$ zu beweisen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \underset{\text{IA}}{=} 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$= 1 - \frac{n+2-1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}\,,$$

wobei das Gleichheitszeichen mit IA darunter bedeuten soll, daß wir hier die Induktionsannahme benutzt haben.

Somit haben wir aus der Richtigkeit der Behauptung für ein festes n auf die Richtigkeit auch für $n+1$ geschlossen, und damit ist die Behauptung bewiesen für alle $n \in \mathbb{N}$.

Alternativ ließe sich diese Behauptung auch direkt beweisen: Wir betrachten $i(i+1)$ als Hauptnenner eines Bruchs mit Nenner i und eines Bruchs mit Nenner $i+1$; nach kurzem Probieren kommt man auf die Formel

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} .$$

Somit ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) \\ = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) &\cdots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} &+ \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} ,\end{aligned}$$

da sich alle anderen Summanden gegenseitig wegheben.

f) Zeigen Sie: Für alle $n \neq 3$ gilt: $n^2 \leq 2^n$!

Lösung: Für $n = 3$ ist $3^2 > 2^3$, die Behauptung also definitiv falsch. Ein Induktionsbeweis kann daher höchstens ab $n = 4$ funktionieren; die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ müssen separat überprüft werden.

Für $n = 1$ haben wir die offensichtlich korrekte Behauptung $1^2 \leq 2^1$; mit $n = 2$ und der Behauptung $2^2 \leq 2^2$ gibt es auch keine Probleme.

Zum Beweis der Formel für $n \geq 4$ starten wir mit dem Induktionsanfang $n = 4$. Hier haben wir die Ungleichung $4^2 \leq 2^4$, bei der auf beiden Seiten 16 steht; die Behauptung ist also richtig.

Für den Induktionsschritt nehmen wir an, sie sei bewiesen für irgendein $n \geq 4$; wir müssen zeigen, daß sie auch für $n+1$ gilt. Nach Induktionsannahme ist

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq 2^n + 2n + 1 .$$

Wenn wir wüßten, daß $2n + 1 \leq 2^n$ ist, könnten wir rechts weiter abschätzen durch $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. Leider sagt uns unsere Induktionsannahme aber nur etwas über die Größenverhältnisse zwischen n^2 und 2^n. Wir können aber n mit n^2 in Verbindung bringen: Für jede natürliche Zahl n ist $n \leq n^2$. Das reicht nicht; müssen also etwas schärfer abschätzen. Da $n \geq 4$ vorausgesetzt war, ist sogar $4n \leq n^2$, also $n \leq \frac{1}{4}n^2$. Somit ist, wenn wir noch einmal die Induktionsannahme ausnutzen,

$$(n+1)^2 \leq 2^n + \frac{n^2}{2} + 1 \leq 2^n + \frac{1}{2} \cdot 2^n + 1 = 2^n + 2^{n-1} + 1 \leq 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n + 2^n = 2^{n+1} .$$

Genau das wollten wir zeigen; also gilt die Behauptung auch für $n+1$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion haben wir sie daher für *alle* $n \geq 4$ bewiesen; da sie für $n = 1$ und $n = 2$ richtig ist, gilt sie für alle $n \neq 3$.

g) Zeigen Sie: Ist beim Algorithmus von HERON $x_n^2 = a$ für irgendein $n \geq 1$, so war bereits $x_0^2 = a$.

Lösung: Falls

$$\begin{aligned}x_n^2 - a &= \frac{1}{4}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 - a = \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 + 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2}\right) - a \\ &= \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 - 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2}\right) = \frac{1}{4}\left(x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2\end{aligned}$$

verschwindet, muß auch der Inhalt der letzten Klammer verschwinden, d.h. $x_{n-1} = \dfrac{a}{x_{n-1}}$. Durch Multiplikation dieser Gleichung mit x_{n-1} folgt, daß bereits $x_{n-1}^2 = a$ ist.

Nun ist im Prinzip klar, wie es weitergeht: Falls $n-1 \geq 1$ ist, können wir nach dem gleichen Schema zeigen, daß auch $x_{n-2}^2 = a$ ist und so weiter, bis wir bei $x_0^2 = a$ angelangt sind.

Um daraus einen exakten Beweis zu machen, können wir beispielsweise folgendermaßen vorgehen: Wir definieren $m \in \mathbb{N}_0$ als die kleinste Zahl, für die $x_m^2 = a$ ist. Da $x_n^2 = a$ vorausgesetzt war, gibt es auf jeden Fall so eine Zahl; wir müssen zeigen, daß sie gleich Null ist.

Angenommen, $m > 0$. Dann können wir die obige Rechnung mit m an Stelle von n durchführen und erhalten die Gleichung $x_{m-1}^2 = a$, im Widerspruch zur vorausgesetzten Minimalität von m. Somit muß $m = 0$ sein.

h) Berechnen Sie nach dem Verfahren von Heron einen Näherungswert für $\sqrt{10}$, indem Sie ausgehend vom Startwert $x_0 = 3$ zwei Iterationen durchführen! Wie genau kennen Sie nun den Wert von $\sqrt{10}$?

Lösung: Mit $x_0 = 3$ ist

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{2}\left(3 + \frac{10}{3}\right) = \frac{19}{6} = 3{,}1\overline{6} \qquad \text{und} \\ x_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{19}{6} + \frac{10 \cdot 6}{19}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{19^2 + 10 \cdot 6^2}{6 \cdot 19} = \frac{721}{228} \approx 3{,}162280701754\,.\end{aligned}$$

Wir wissen, daß $\sqrt{10}$ zwischen $10/x_2$ und x_2 liegen muß, d.h.

$$\frac{2280}{721} < \sqrt{10} < \frac{721}{228} \quad \text{oder} \quad 3{,}162274618585 < \sqrt{10} < 3{,}162280701755\,.$$

Wir kennen die Zahl also mit einem Fehler von weniger als 10^{-5}.

i) *Richtig oder falsch:* Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ ist eine Nullfolge.

Lösung: *Richtig,* denn für alle n ist $0 < a_n < \frac{1}{n}$; wenn wir uns ein $\varepsilon > 0$ vorgeben, ist also $a_n < \varepsilon$ für alle $n > 1/\varepsilon$. Ist n_0 die kleinste natürliche Zahl größer $1/\varepsilon$, ist also $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

(Das ist natürlich eine sehr grobe Abschätzung; da wir nur zeigen müssen, daß es zu jedem ε *irgendein* n_0 gibt, lohnt es sich nicht, mehr Aufwand zu betreiben.)

j) *Richtig oder falsch:* Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ist eine Nullfolge.

Lösung: Hier läßt sich direkt nichts sehen; wir müssen b_n zunächst geeignet umformen. Da sich nichts anderes anbietet, versuchen wir es mit der dritten binomischen Formel:

$$b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\,,$$

und das ist offensichtlich kleiner als eine vorgegebene Schranke $\varepsilon > 0$, wenn $n > 1/\varepsilon^2$. Ist n_0 die kleinste natürliche Zahl, die größer ist als $1/\varepsilon^2$, ist also $|b_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

k) *Richtig oder falsch:* Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = (n+1)^2 - n^2$ ist eine Nullfolge.

Lösung: Das ist offensichtlich falsch, denn $c_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ ist die Folge der ungeraden Zahlen. Deren Glieder mit wachsendem n immer größer; es kann sich also unmöglich um eine Nullfolge handeln: Schon für $\varepsilon = 1$ gibt es kein einziges n mit $|c_n| < \varepsilon$.

l) *Richtig oder falsch:* Die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ ist eine Nullfolge.

Lösung: *Richtig,* denn

$$|d_n| = d_n = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

für alle $n \geq 1/\sqrt{\varepsilon}$. Wir können für n_0 also irgendeine natürliche Zahl größer $1/\sqrt{\varepsilon}$ wählen.