

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 17–19. September 2012

- a) Zeigen Sie, daß es keine rationale Zahl x gibt mit $x^2 = 10$!
b) Zeigen Sie, daß es keine rationale Zahl x gibt mit $x^3 = 5$!
c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß die Summe der ersten n Quadratzahlen nach der Formel

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

berechnet werden kann!

- d) Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgende Abschwächung der BERNOULLISCHEN Ungleichung:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \geq -1.$$

- e) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}!$$

- f) Zeigen Sie: Für alle $n \neq 3$ gilt: $n^2 \leq 2^n$!
g) Zeigen Sie: Ist beim Algorithmus von HERON $x_n^2 = a$ für irgendein $n \geq 1$, so war bereits $x_0^2 = a$.
h) Berechnen Sie nach dem Verfahren von HERON einen Näherungswert für $\sqrt{10}$, indem Sie ausgehend vom Startwert $x_0 = 3$ zwei Iterationen durchführen! Wie genau kennen Sie nun den Wert von $\sqrt{10}$?
i) *Richtig oder falsch:* Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ist eine Nullfolge.
j) *Richtig oder falsch:* Die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ist eine Nullfolge.
k) *Richtig oder falsch:* Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = (n+1)^2 - n^2$ ist eine Nullfolge.
l) *Richtig oder falsch:* Die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ ist eine Nullfolge.