

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 11–12. September 2012

a) Bestimmen Sie für die Mengen

$$A = \{1, 2, 4, 7, 10, 14, 18, 23\} \quad \text{und} \quad B = \{1, 3, 6, 10, 15, 23, 30\}$$

Durchschnitt, Vereinigung sowie die beiden Differenzen $A \setminus B$ und $B \setminus A$!

Lösung: Die Vereinigung $A \cup B$ besteht aus allen Elementen, die in einer der beiden Mengen vorkommen, also ist

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 10, 14, 15, 18, 23, 30\}.$$

Der Durchschnitt $A \cap B$ enthält nur die Elemente, die in *beiden* Mengen liegen, also ist

$$A \cap B = \{1, 10, 23\}.$$

Die Differenz $A \setminus B$ enthält alle Elemente, die in A , nicht aber in B liegen; somit ist

$$A \setminus B = \{2, 4, 7, 14, 18\} \quad \text{und} \quad \text{entsprechend} \quad B \setminus A = \{3, 6, 15, 30\}.$$

b) *Richtig oder falsch:* Für zwei Mengen A, B gilt $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise ist für die Mengen aus dem vorigen Beispiel

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{2, 3, 4, 6, 7, 14, 15, 18, 30\}$$

verschieden von $A \cup B$: Die Elemente 1, 10, 23 fehlen. (Eine richtige Formel wäre

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B),$$

aber danach war nicht gefragt.)

c) *Richtig oder falsch:* Für zwei Mengen A, B gilt $A \cup (A \cap B) = A$.

Lösung: *Richtig*, denn jedes Element von $A \cap B$ liegt insbesondere in A , so daß bei der Bildung der Vereinigung keine neuen Elemente dazukommen.

d) *Richtig oder falsch:* Für vier Mengen A, B, C, D gilt stets

$$(A \cap B) \cap (C \cap D) = (A \cap C) \cap (B \cap D).$$

Lösung: *Richtig:* $A \cap B$ besteht aus allen Elementen, die sowohl in A als auch in B liegen, $C \cap D$ aus denen, die sowohl in C als auch in D liegen. $(A \cap B) \cap (C \cap D)$ enthält entsprechend alle Elemente, die sowohl in $A \cap B$ als auch in $C \cap D$ liegen, also genau die, die jeder der vier Mengen A, B, C, D liegen. Dieselbe Art von Argument zeigt, daß auch $(A \cap C) \cap (B \cap D)$ genau diese Elemente enthält; also sind die beiden Mengen gleich.

e) *Richtig oder falsch:* Die Menge aller Zehnerzahlen aus \mathbb{N} ist eine Teilmenge der Menge aller gerader natürlicher Zahlen.

Lösung: *Richtig*, denn jede Zehnerzahl ist gerade.

f) *Richtig oder falsch:* Die Menge aller Quadrate natürlicher Zahlen ist eine Teilmenge der Menge aller vierter Potenzen natürlicher Zahlen.

Lösung: *Falsch*; beispielsweise ist vier zwar eine Quadratzahl, läßt sich aber nicht als vierte Potenz einer natürlichen Zahl schreiben.

- g) G sei die Menge aller geraden ganzen Zahlen, D die Menge aller durch drei teilbarer ganzen Zahlen. Was ist $G \cap D$?

Lösung: Im Durchschnitt $G \cap D$ liegen alle ganzen Zahlen, die sowohl gerade als auch durch drei teilbar sind, die also sowohl durch zwei als auch durch drei teilbar sind. Somit ist

$$G \cap D = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ ist durch sechs teilbar}\}$$

die Menge aller Sechserzahlen.

- h) Welche Elemente hat die Menge

$$A = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq 20 \text{ und } z \text{ ist Quadratzahl}\} ?$$

Lösung: Die einzigen Quadratzahlen kleiner oder gleich zwanzig sind 0, 1, 4, 9 und 16, also ist $A = \{0, 1, 4, 9, 16\}$.

- i) *Richtig oder falsch*: Die Menge aller rationaler Zahlen mit ungeradem Nenner ist (mit der üblichen Addition und Multiplikation) ein Körper.

Lösung: *Falsch*; beispielsweise gibt es für $a = \frac{2}{3}$ keinen Bruch a'' mit ungeradem Nenner, für den $aa'' = 1$ ist, denn alle Darstellungen von $\frac{3}{2}$ haben geraden Nenner. (Die Existenz von multiplikativen Inversen ist übrigens das einzige Körperaxiom, das nicht erfüllt ist; man überlegt sich leicht, daß es mit den anderen keine Probleme gibt.)

- j) Zeigen Sie, daß für je vier Elemente a, b, c, d eines Körpers gilt $(ab)(cd) = (ac)(bd)$!

Lösung: Wir formen die linke Seite um nach dem Assoziativ- und dem Kommutativitätsgesetz der Multiplikation; der Kürze halber soll dabei eine Nummer unter dem Gleichheitszeichen bedeuten, daß die rechte Seite durch Anwendung des entsprechenden Körperaxioms aus der linken hervorgeht. Teilprodukte, die für die Anwendung des Assoziativgesetzes als ein einziges Körperelement betrachtet werden, sind auf der linken Seite des Gleichheitszeichens unterstrichen:

$$\underline{(ab)}(cd) \stackrel{\text{II.1}}{=} ((\underline{ab})c)d \stackrel{\text{II.1}}{=} (a(\underline{bc}))d \stackrel{\text{II.4}}{=} (a(\underline{cb}))d \stackrel{\text{II.1}}{=} (\underline{(ac)b})d \stackrel{\text{II.1}}{=} (ac)(bd)$$

- k) Zeigen Sie, daß das Element a' mit $a + a' = 0$ in einem Körper eindeutig bestimmt ist!

Lösung: Sei $a + a'' = 0$. Dann ist

$$\underset{\text{I.2}}{a'} \stackrel{=}{=} a' + 0 = a' + (a + a'') \stackrel{\text{I.1}}{=} (a' + a) + a'' = 0 + \underset{\text{I.2}}{a''} \stackrel{=}{=} a'' .$$

- l) Zeigen Sie, daß in jedem Körper $(-1) \cdot (-1) = 1$ ist!

Lösung: Nach dem Distributivgesetz ist

$$(-1)(1 + (-1)) = (-1) + (-1) \cdot (-1) .$$

Somit ist $(-1) \cdot (-1)$ das nach der vorigen Aufgabe eindeutig bestimmte additive Inverse zu -1; wegen $(-1) + 1 = 0$ ist dies aber die Eins.

- m) Zeigen Sie, daß in jedem Körper $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ ist!

Lösung:

$$0 = a \cdot 0 = a \cdot ((-b) + b) \stackrel{\text{III}}{=} a \cdot (-b) + a \cdot b ;$$

daher ist $a \cdot (-b)$ das eindeutig bestimmte additive Inverse zu $a \cdot b$, also gleich $-a \cdot b$.

Alternativ: Laut Skriptum ist $-x = (-1) \cdot x$ für alle $x \in k$. Also ist

$$a \cdot (-b) = a \cdot ((-1) \cdot b) \stackrel{II.1}{=} (a \cdot (-1)) \cdot b \stackrel{II.4}{=} ((-1) \cdot a) \cdot b \stackrel{II.1}{=} (-1) \cdot (a \cdot b) = -(a \cdot b).$$

n) Zeigen Sie, daß in jedem Körper $(-a) \cdot (-a) = a \cdot a$ gilt!

Lösung: Nach der vorigen Aufgabe ist $a \cdot (-a) = -(a \cdot a)$, also nach dem Kommutativgesetz auch $(-a) \cdot a = -(a \cdot a)$. Außerdem ist nach dem Distributivgesetz

$$(-a) \cdot (a + (-a)) = (-a) \cdot a + (-a) \cdot (-a);$$

andererseits steht links $(-a) \cdot 0 = 0$. Somit sind sowohl $a \cdot a$ als auch $(-a) \cdot (-a)$ invers zu $(-a) \cdot a$, also gleich.

o) Zeigen Sie, ausgehend von der in der Vorlesung bewiesenen ersten binomischen Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, daß auch in jedem Körper die zweite binomische Formel $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ gilt!

Lösung: Nach dem Körperaxiom I.3 gibt es zu b ein Element b' , so daß $b + b' = 0$ ist; wir schreiben dieses in der üblichen Weise als $-b$. Damit ist

$$(a + b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2.$$

Nach dem Distributivgesetz ist

$$2a(b + (-b)) = 2ab + 2a(-b);$$

wie wir aus einer der vorigen Aufgaben wissen, ist $2a(-b) = -(2ab)$, nach einer anderen ist $(-b) \cdot (-b) = b \cdot b$. Somit ist

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

p) Beweisen Sie, daß für je zwei Elemente x, y eines Körpers gilt

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = xy!$$

Lösung: Nach der ersten binomischen Formel (und den Regeln der Bruchrechnung) ist

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4};$$

nach der zweiten entsprechend

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \frac{(x-y)^2}{4} = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{4}.$$

Subtrahiert man die beiden Formeln voneinander, führt dies auf die Differenz

$$\frac{(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2)}{4} = \frac{4xy}{4} = xy.$$