

30. November 2012

13. Übungsblatt Analysis I

Fragen: (je ein Punkt)

1) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $z = 2^i$!

Lösung: $2^i = e^{i \log 2} = \cos \log 2 + i \sin \log 2$

2) *Richtig oder falsch:* Falls die stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ keine negativen Werte annimmt, ist $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Lösung: *Richtig*, denn ist $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, so ist nach der Monotonieregel $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b 0 dx = 0$.

3) Bestimmen Sie alle Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = \frac{1}{x^2}$!

Lösung: Da $1/x$ die Ableitung $-1/x^2$ hat, ist $-1/x$ eine Funktion mit Ableitung $1/x^2$. Zwei solche Funktionen unterscheiden sich nur durch eine Konstante; jede Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = 1/x^2$ läßt sich also schreiben als $F(x) = -1/x + C$ mit einem $C \in \mathbb{R}$.

4) *Richtig oder falsch:* Für jede dieser Funktionen F ist $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2} = F(2) - F(-1)$.

Lösung: *Falsch*, denn weder der Integrand $1/x^2$ noch die Funktion F ist für $x = 0$ definiert; das Integral existiert daher nicht.

Aufgabe 5: (5 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen der Sinus- und der Kosinusfunktion!

Lösung: Nach den EULERSchen Formeln ist $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$; daher verschwindet $\sin x$ genau dann, wenn $e^{iz} = e^{-iz}$ ist. Wir müssen uns daher zunächst überlegen, wann die Exponentialfunktion für zwei komplexe Zahlen denselben Wert annimmt.

Für zwei komplexe Zahlen $x + iy$ und $u + iv$ (mit $u, v, x, y \in \mathbb{R}$) ist

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \quad \text{und} \quad e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \sin v).$$

Die komplexen Zahlen in der Klammer haben jeweils Betrag eins; also ist $|e^{x+iy}| = e^x$ und $|e^{u+iv}| = e^u$. Falls $e^{x+iy} = e^{u+iv}$ ist, muß daher $e^x = e^u$ sein und damit $x = u$, da die Exponentialfunktion im Reellen streng monoton wachsend und damit injektiv ist.

Dann muß aber auch $\cos y + i \sin y = \cos v + i \sin v$ sein. Da y und v reell sind, gilt dies genau dann, wenn $\cos y = \cos v$ und $\sin y = \sin v$ ist. Das wiederum ist genau dann der Fall, wenn sich y und v höchstens um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden. Zwei komplexe Zahlen führen somit genau dann zum gleichen Wert der Exponentialfunktion, wenn sie sich durch ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden.

Ist $e^{iz} = e^{-iz}$, so muß es also ein $k \in \mathbb{Z}$ geben, so daß

$$iz - (-iz) = 2iz = 2k\pi i \quad \text{oder} \quad z = k\pi.$$

Auch im Komplexen hat der Sinus also nur die bekannten Nullstellen bei den ganzzahligen Vielfachen von π .

$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ verschwindet genau dann, wenn $e^{iz} = -e^{-iz}$ ist. Da $e^{\pi i} = -1$ ist, können wir das auch so ausdrücken, daß $e^{iz} = -e^{-iz} = e^{i(\pi-z)}$ ist. Dazu muß es, wie wir oben gesehen haben, ein $k \in \mathbb{Z}$ geben, so daß

$$iz - i(\pi - z) = 2iz - \pi i = 2k\pi i \quad \text{oder} \quad z = \frac{2k+1}{2}\pi$$

ist. Auch hier gibt es also nur die aus dem Reellen bekannten Nullstellen.

- b) Bestimmen Sie die größte Teilmenge $D_1 \subseteq \mathbb{C}$, auf der $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ erklärt werden kann, und die größte Teilmenge $D_2 \subseteq \mathbb{C}$, auf der $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ erklärt werden kann!

Lösung: Da Sinus und Kosinus auf ganz \mathbb{C} erklärt sind, müssen wir nur die Nullstellen des jeweiligen Nenners ausschließen; nach a) ist daher

$$D_1 = \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{2k+1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{und} \quad D_2 = \mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi.$$

- c) Bestimmen Sie die Ableitungen von $\tan x$ auf $D_1 \cap \mathbb{R}$ und $\cot x$ auf $D_2 \cap \mathbb{R}$!

Lösung: Nach der Quotientenregel hat Tangens die Ableitung

$$\frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x,$$

und der Kotangens entsprechend

$$\frac{\sin x \cdot (-\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x.$$

Aufgabe 6: (5 Punkte)

- a) Drücken Sie $\cos^4 x$ aus als Linearkombination von Termen der Form $\cos ax$!

Lösung: Ausmultiplizieren nach dem binomischen Lehrsatz führt auf

$$\begin{aligned} \cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 = \frac{e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}}{16} \\ &= \frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{16} + \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{4} + \frac{3}{8} = \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

- b) Zeigen Sie: Für jeden Winkel φ genügt $z = \cos \frac{\varphi}{2}$ der quadratischen Gleichung

$$z^2 = \frac{1 + \cos \varphi}{2}!$$

Lösung: Mit der ersten binomischen Formel erhalten wir

$$z^2 = \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \left(\frac{e^{i\varphi/2} + e^{-i\varphi/2}}{2} \right)^2 = \frac{e^{i\varphi} + 2 + e^{-i\varphi}}{4} = \frac{\cos \varphi}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1 + \cos \varphi}{2}.$$

- c) Berechnen Sie $\sin \frac{\pi}{12}$ und $\cos \frac{\pi}{12}$!

Lösung: $\frac{\pi}{6}$ entspricht 30° ; daher ist $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ und $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Nach b) erfüllt $z = \cos \frac{\pi}{12}$ die Gleichung

$$z^2 = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4};$$

da Sinus und Kosinus von $\frac{\pi}{12}$ positiv sind, folgt

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}} \quad \text{und} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{1 - \frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Aufgabe 7: (2 Punkte)

Eine Schablone zum Zeichnen der Parabel $y = x^2$ habe eine Länge (= maximaler y -Wert) von 12cm. Welche Fläche hat sie?

Lösung: Wenn wir die Schablone so mit der breiten Seite nach unten auf die x -Achse stellen, daß ihre Mittlellinie auf der y -Achse liegt, ist ihre Fläche gerade die unter der Kurve $f(x) = 12 - x^2$ zwischen $x = -\sqrt{12}$ und $x = \sqrt{12}$, also

$$\int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} (12 - x^2) dx = 12x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} = 24\sqrt{12} - \frac{24\sqrt{12}}{3} = 16\sqrt{12} = 32\sqrt{3}.$$

(Alternativ kann man die Schablone auch wie üblich anlegen und ihre Fläche berechnen als Fläche des Rechtecks der Höhe 12 zwischen $-\sqrt{12}$ und $\sqrt{12}$ minus $\int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} x^2 dx$.)

Aufgabe 8: (6 Punkte)

- a) Berechnen Sie anhand einer Approximation durch vier Rechtecke eine obere und eine untere Schranke für die Fläche unter der Kurve $y = 1/\sqrt{9-x^3}$ zwischen $x = 0$ und $x = 2$! (Taschenrechnergenauigkeit)

Lösung: x^3 ist über $[0, 2]$ monoton wachsend, also sind $9-x^3$ und auch $\sqrt{9-x^3}$ monoton fallend und die Funktion $f(x) = 1/\sqrt{9-x^3}$ als Kehrwert davon wieder monoton wachsend. Wir erhalten damit eine untere Schranke, wenn wir als Höhe der vier Rechtecke jeweils den Funktionswert an der linken Intervallgrenze nehmen. Bei vier Rechtecken gleicher Breite erhalten wir damit

$$\frac{f(0) + f(\frac{1}{2}) + f(1) + f(\frac{3}{2})}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{71}\sqrt{142} + \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{2}{15}\sqrt{10} \right) \approx 0,722.$$

- b) Beweisen Sie die KEPLERSche Faßregel: Für $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ ist die Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der x -Achse zwischen den Koordinatenwerten $x = a$ und $x = b$ gleich $\frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2)$ mit $y_0 = f(a)$, $y_1 = f(\frac{a+b}{2})$ und $y_2 = f(b)$.

Lösung: Die Fläche ist

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) dx &= \alpha \int_a^b x^3 dx + \beta \int_a^b x^2 dx + \gamma \int_a^b x dx + \delta \int_a^b dx \\ &= \alpha \frac{b^4 - a^4}{4} + \beta \frac{b^3 - a^3}{3} + \gamma \frac{b^2 - a^2}{2} + \delta(b - a) \\ &= \frac{(b-a)(3\alpha(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) + 4\beta(a^2 + ab + b^2) + 6\gamma(a+b) + 12\delta)}{12}. \end{aligned}$$

Wegen

$$4f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}(a+b)^3 + \beta(a+b)^2 + 2\gamma(a+b) + 4\delta$$

ist

$$\begin{aligned} &f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \\ &= (\alpha(a^3 + b^3 + \frac{1}{2}(a+b)^3) + \beta(a^2 + b^2 + (a+b)^2) + \gamma(a+b + 2(a+b)) + \delta(2+4)) \\ &= \frac{3\alpha}{2}(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) + 2\beta(a^2 + ab + b^2) + 3\gamma(a+b) + 6\delta; \end{aligned}$$

die rechte Seite der KEPLERSchen Faßregel ist damit

$$\frac{(b-a)(3\alpha(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) + 4\beta(a^2 + ab + b^2) + 6\gamma(a+b) + 12\delta)}{12},$$

was wir oben als Fläche unter der Kurve berechnet hatten.

- c) Gelegentlich wird diese Regel auch für beliebige Funktionen zur näherungsweisen Berechnung des Integrals eingesetzt. Schätzen Sie nach dieser Formel die in a) betrachtete Fläche!

Lösung: Hier ist

$$b - a = 2, \quad f(0) = \frac{1}{3}, \quad f(1) = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{und} \quad f(2) = 1,$$

also erhalten wir die Schätzung

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \sqrt{2} + 1 \right) = \frac{4}{9} + \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0,916.$$

(Der tatsächliche Wert des Integrals liegt bei etwa 0,814.)