WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

23. November 2012

12. Übungsblatt Analysis I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Bestimmen Sie die TAYLOR-Reihe von $f(x) = x^5$ um $x = 0$!

2) *Richtig oder falsch:* Sind f und g analytische Funktionen, so auch $f + g$ und $f - g$.

3) Zeigen Sie: Die Menge M aller reeller Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, die der Rekursionsvorschrift $a_k = \alpha a_{k-1} + \beta a_{k-2}$ genügen für zwei vorgegebene Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, d.h. für je zwei Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ aus M und zwei beliebige reelle Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ liegt auch $(\lambda a_k + \mu b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ in M.

4) *Richtig oder falsch:* Ist $f'''(x) = -f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist $f(x)$ darstellbar in der Form $a \sin x + b \cos x$.

5) Zeigen Sie: $f(x) = e^{-2x} \cos 3x$ erfüllt eine Beziehung der Form $f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$ mit $a, b \in \mathbb{R}$!

Aufgabe 6: *(7 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Die n-te Ableitung von $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ist $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$!

b) Berechnen Sie die TAYLOR-Reihe von $g(x) = \log x$ um $x = 1$!

c) Zeigen Sie, daß diese Reihe für $h = 1$ konvergiert!

d) Welchen Grenzwert hat die alternierende harmonische Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$?

Aufgabe 7: *(4 Punkte)*
Berechnen Sie die TAYLOR-Reihen von

a) $f(x) = \sinh x \cdot \cosh x$ um den Nullpunkt

b) $g(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ um $x = 1$

Aufgabe 8: *(4 Punkte)*
Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch die Bedingungen

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2}\,.$$

Finden Sie eine geschlossene Formel für a_k!

Abgabe bis zum Freitag, dem 30. November 2012, um 12.00 Uhr