Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

16. November 2012

11. Übungsblatt Analysis I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Wo ist die Funktion $f(x) = x^4 - 2x^2$ monoton wachsend, wo monoton fallend?

2) f und g seien zweifach differenzierbar. Drücken Sie die zweite Ableitung $(fg)''$ aus durch die Funktion f und g sowie deren Ableitungen!

3) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f(x) = \cosh x$ ist konkav auf ganz $\mathbb{R}$.

4) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f(x) = -x \log x$ ist konkav auf $\mathbb{R}_{>0}$.

Aufgabe 5: *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ konvergiert!

b) Zeigen Sie, daß die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$ für alle $x \in (-1, 1)$ konvergiert!

Aufgabe 6: *(3 Punkte)*
Bestimmen Sie die Grenzwerte

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x}$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}$ *c)* $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^4 - 3x^2 - 2x}$

Aufgabe 7: *(4 Punkte)*

a) $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion, für die $y = \displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ existiere. Zeigen Sie, daß dann auch die Folge $\big(f(k)\big)_{k\to\mathbb{N}}$ gegen y konvergiert!

b) Berechnen Sie $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}$!

Aufgabe 8: *(5 Punkte)*

a) Die Reihe $\displaystyle\sum_{k+1}^{\infty} a_k$ sei absolut konvergent, und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sei eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, daß dann auch $\displaystyle\sum_{k+1}^{\infty} a_k b_k$ absolut konvergiert!

b) Gilt das auch für jede konvergente Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$?

c) Sei $a_k = \dfrac{(-1)^k}{\log(k+1)}$ und $b_k = (-1)^k \dfrac{\log(k+1)}{k}$. Zeigen Sie, daß zwar $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert und daß $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, daß aber $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ divergiert!

Abgabe bis zum Freitag, dem 23. November 2012, um 12.00 Uhr