

2. November 2012

9. Übungsblatt Analysis I

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Es gibt eine reelle Zahl x_M im offenen Intervall $(0, 1)$, so daß die Funktion $f(x) = 1 - |x|$ dort ihr Maximum annimmt.
- 2) *Richtig oder falsch:* Es gibt eine reelle Zahl x_m im offenen Intervall $(0, 1)$, so daß die Funktion $f(x) = 1 - |x|$ dort ihr Minimum annimmt.
- 3) *Richtig oder falsch:* Die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\log k}$ konvergiert.
- 4) *Richtig oder falsch:* Die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\log k}$ konvergiert.
- 5) *Richtig oder falsch:* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sei eine Reihe mit lauter positiven Summanden. Falls es ein $q > 1$ gibt, so daß $a_{k+1} \geq qa_k$ ist für alle k , divergiert die Reihe.

Aufgabe 6: (5 Punkte)

- a) $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetige Funktionen und $[a, b] \subset D$. Zeigen Sie: Ist $f(a) < g(a)$ und $f(b) > g(b)$, so gibt es ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = g(x)$.
- b) Zeigen Sie: Es gibt eine positive reelle Zahl x mit $2^x = x^4$. Finden Sie eine natürliche Zahl n , so daß $n < x < n + 1$ ist!
- c) Gibt es eine reelle Zahl $x \in [0, 2]$ mit $2^x = x + 2 - 2[x]$?

Aufgabe 7: (6 Punkte)

An welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Funktionen definiert, und an welchen davon sind sie stetig?

$$a) f(x) = \frac{1}{x^3 - x} \quad b) g(x) = \begin{cases} e^x & \text{falls } x \geq 0 \\ e^{-x} & \text{falls } x < 0 \end{cases} \quad c) h(x) = \begin{cases} e^{x^2-1} & \text{falls } |x| \leq 1 \\ x^2 + 1 & \text{falls } 1 < |x| < 2 \\ 3 + \frac{4}{x} & \text{falls } |x| \geq 2 \end{cases}$$

Aufgabe 8: (4 Punkte)

- a) Zeigen Sie: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ konvergiert absolut für jedes $x \in (-1, 1)$.
- b) Was können Sie über Konvergenz in den Randpunkten $x = \pm 1$ sagen?