

26. Oktober 2012

8. Übungsblatt Analysis I

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, so ist das Bild eines jeden abgeschlossenen Intervalls $[a, b]$ wieder ein abgeschlossenes Intervall.
- 2) *Richtig oder falsch:* Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, so ist das Bild eines jeden offenen Intervalls (a, b) wieder ein offenes Intervall.
- 3) *Richtig oder falsch:* Die Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \lceil x \rceil = \min\{z \in \mathbb{Z} \mid x \leq z\}$ hat in jedem abgeschlossenen Intervall sowohl ein Maximum M als auch ein Minimum m , und es gibt Werte $x_m, x_M \in [a, b]$ mit $f(x_m) = m$ und $f(x_M) = M$.
- 4) *Richtig oder falsch:* Die Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \lceil x \rceil - x$ hat in jedem abgeschlossenen Intervall sowohl ein Maximum M als auch ein Minimum m , und es gibt Werte $x_m, x_M \in [a, b]$ mit $f(x_m) = m$, und $f(x_M) = M$.

Aufgabe 6: (5 Punkte)

Entscheiden Sie bei den folgenden Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, für welche $x \in \mathbb{R}$ sie stetig sind und für welche nicht!

- a) $f(x) = e^{e^x + e^{-x} + 1}$ b) $g(x) = |x^2 - 1|$ c) $h(x) = \lceil x \rceil - x$

Aufgabe 6: (4 Punkte)

- a) Zeigen Sie, daß das Polynom $x^3 - 2x^2 - x + 1$ zwischen $x = -2$ und $x = 3$ mindestens eine Nullstelle hat!
- b) Tatsächlich gibt es dort sogar drei Nullstellen. Finden Sie drei Intervalle $[a_i, b_i]$ mit ganzzahligen Grenzen, die jeweils genau eine dieser Nullstellen enthalten!

Aufgabe 7: (7 Punkte)

Sinus hyperbolicus und *Kosinus hyperbolicus* einer reellen Zahl x sind definiert als $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ und $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Zeigen sie:

- a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- b) $\cosh x \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- c) $\sinh x$ ist eine monoton wachsende Funktion und hat eine auf ganz \mathbb{R} definierte stetige Umkehrfunktion.
- d) Drücken Sie $\sinh(x + y)$ sowie $\cosh(x + y)$ aus durch $\sinh x, \sinh y, \cosh x$ und $\cosh y$!
- e) Wo ist $\cosh x$ monoton wachsend, wo monoton fallend?

Abgabe bis zum Freitag, dem 2. November 2012, um 12.00 Uhr