Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

12. Oktober 2012

6. Übungsblatt Analysis I

Fragen: *(je ein Punkt)*

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Wenn die reelle Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergiert gegen ∞, ist sie monoton wachsend.
2) *Richtig oder falsch:* Konvergiert die komplexe Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $z \in \mathbb{C}$, so konvergiert die Folge $(\overline{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ der konjugiert komplexen Zahlen gegen $\overline{z}$.
3) *Richtig oder falsch:* Sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei monoton wachsende Folgen reeller Zahlen, so ist auch $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.
4) *Richtig oder falsch:* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine reelle Folge derart, daß die Folge $\big(|x_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x oder gegen $-x$.
5) *Richtig oder falsch:* $A \subseteq \mathbb{R}$ sei beschränkt und habe mindestens zwei Elemente. Dann ist das Infimum von A echt kleiner als das Supremum.

Aufgabe 6: *(8 Punkte)*

Entscheiden Sie bei jeder der hier definierten reellen Zahlenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ob und gegebenenfalls wohin sie konvergiert, ob sie beschränkt ist und ob sie monoton wachsend *bzw.* fallend ist!

a) $x_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ *b)* $x_n = -\frac{n+3}{n}$ *c)* $x_n = \frac{n^3+3}{n^3-3}$ *d)* $x_n = 3^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Aufgabe 7: *(3 Punkte)*

Zeigen Sie:

a) Für zwei reelle x, y ist $\max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$!

b) Konvergieren die reellen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x und y, so konvergiert die Folge $\big(\max(x_n,y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\max(x,y)$.

c) Konvergiert auch die Folge $\big(\min(x_n,y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\min(x,y)$?

Aufgabe 8: *(4 Punkte)*

Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind nach oben, welche nach unten beschränkt? Bestimmen Sie, sofern es existiert, auch Infimum und Supremum der Menge!

$$A = \left\{2 + \frac{3}{n^2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 < 10\},$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 > 10\}, \qquad D = \{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Abgabe bis zum Freitag, dem 19. Oktober 2012, um 12.00 Uhr