

5. Oktober 2012

5. Übungsblatt Analysis I

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $(a_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Dann ist auch die Folge $(a_n^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.
- 2) *Richtig oder falsch:* Eine Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von komplexen Zahlen ist genau dann eine Nullfolge, wenn die Folge $(|c_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.
- 3) *Richtig oder falsch:* Sind $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolgen komplexer Zahlen, so auch $(c_n + d_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 4) *Richtig oder falsch:* Auch für Gleitkommazahlen gilt das Kommutativgesetz der Addition und der Multiplikation.
- 5) *Richtig oder falsch:* Für jede komplexe Zahl w mit $w^2 = z$ ist $|w| = \sqrt{|z|}$.

Aufgabe 6: (4 Punkte)

Finden Sie die Fehler in den folgenden Beweisen:

- a) x und y seien zwei reelle Zahlen und $x^2 = y^2$. Dann ist $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 0$. Kürzen durch $x + y$ zeigt, daß dann auch $x - y$ verschwindet, d.h. $x = y$.
- b) Um zu beweisen, daß alle Hörer der Vorlesung Analysis I das gleiche Gewicht haben, zeigen wir durch vollständige Induktion, daß in jeder Gruppe aus höchstens n Studenten die Gewichte gleich sind: Für $n = 1$ ist das trivial; für den Induktionsschritt nehmen wir an, daß wir die Behauptung für ein festes n bereits bewiesen haben und betrachten eine Gruppe aus höchstens $n + 1$ Studenten. Wenn wir den Kleinsten aus der Gruppe ausschließen, haben alle übrigen nach Induktionsannahme das gleiche Gewicht; insbesondere hat also der Größte das gleiche Gewicht wie die anderen. Wenn wir ihn ausschließen und den Kleinsten wieder dazunehmen, haben wir wieder eine Gruppe von höchstens n Studenten; daher hat auch dieser das gleiche Gewicht wie die anderen, d.h. alle Gewichte stimmen überein.

Aufgabe 7: (3 Punkte)

Berechnen Sie in einem Gleitkommasystem mit einer Mantisse aus drei Dezimalstellen und Exponenten zwischen -3 und $+3$ für $a = 0,889$, $b = 0,888$ und $c = 200$ die beiden Gleitkommazahlen $x = (a - b)c$ und $y = ac - bc$, wobei alle Zwischenergebnisse jeweils zur nächsten darstellbaren Zahl gerundet werden sollen. (Für die Berechnung von y gilt, wie üblich, daß Multiplikationen vor Addition und Subtraktion ausgeführt werden; ausführlicher geschrieben ist also $y = (ac) - (bc)$.)

Aufgabe 8: (8 Punkte)

Welche der hier angegebenen Vorschriften definieren Nullfolgen?

$$a_n = \frac{n+i}{n-i}, \quad b_n = \frac{n+i}{(n-i)^2}, \quad c_n = \frac{1}{1+in}, \quad d_n = \frac{n+i}{n^2+i}$$

Abgabe bis zum Freitag, dem 12. Oktober 2012, um 12.00 Uhr