

5. Oktober 2012

## 5. Übungsblatt Analysis I

**Fragen:** (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  sei  $(a_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge. Dann ist auch die Folge  $(a_n^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge.
- 2) *Richtig oder falsch:* Eine Folge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von komplexen Zahlen ist genau dann eine Nullfolge, wenn die Folge  $(|c_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge ist.
- 3) *Richtig oder falsch:* Sind  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Nullfolgen komplexer Zahlen, so auch  $(c_n + d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- 4) *Richtig oder falsch:* Auch für Gleitkommazahlen gilt das Kommutativgesetz der Addition und der Multiplikation.
- 5) *Richtig oder falsch:* Für jede komplexe Zahl  $w$  mit  $w^2 = z$  ist  $|w| = \sqrt{|z|}$ .

**Aufgabe 6:** (4 Punkte)

Finden Sie die Fehler in den folgenden Beweisen:

- a)  $x$  und  $y$  seien zwei reelle Zahlen und  $x^2 = y^2$ . Dann ist  $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 0$ . Kürzen durch  $x + y$  zeigt, daß dann auch  $x - y$  verschwindet, d.h.  $x = y$ .
- b) Um zu beweisen, daß alle Hörer der Vorlesung Analysis I das gleiche Gewicht haben, zeigen wir durch vollständige Induktion, daß in jeder Gruppe aus höchstens  $n$  Studenten die Gewichte gleich sind: Für  $n = 1$  ist das trivial; für den Induktionsschritt nehmen wir an, daß wir die Behauptung für ein festes  $n$  bereits bewiesen haben und betrachten eine Gruppe aus höchstens  $n + 1$  Studenten. Wenn wir den Kleinsten aus der Gruppe ausschließen, haben alle übrigen nach Induktionsannahme das gleiche Gewicht; insbesondere hat also der Größte das gleiche Gewicht wie die anderen. Wenn wir ihn ausschließen und den Kleinsten wieder dazunehmen, haben wir wieder eine Gruppe von höchstens  $n$  Studenten; daher hat auch dieser das gleiche Gewicht wie die anderen, d.h. alle Gewichte stimmen überein.

**Aufgabe 7:** (3 Punkte)

Berechnen Sie in einem Gleitkommasystem mit einer Mantisse aus drei Dezimalstellen und Exponenten zwischen  $-3$  und  $+3$  für  $a = 0,889$ ,  $b = 0,888$  und  $c = 200$  die beiden Gleitkommazahlen  $x = (a - b)c$  und  $y = ac - bc$ , wobei alle Zwischenergebnisse jeweils zur nächsten darstellbaren Zahl gerundet werden sollen. (Für die Berechnung von  $y$  gilt, wie üblich, daß Multiplikationen vor Addition und Subtraktion ausgeführt werden; ausführlicher geschrieben ist also  $y = (ac) - (bc)$ .)

**Aufgabe 8:** (8 Punkte)

Welche der hier angegebenen Vorschriften definieren Nullfolgen?

$$a_n = \frac{n+i}{n-i}, \quad b_n = \frac{n+i}{(n-i)^2}, \quad c_n = \frac{1}{1+in}, \quad d_n = \frac{n+i}{n^2+i}$$

Abgabe bis zum Freitag, dem 12. Oktober 2012, um 12.00 Uhr