

28. September 2012

#### 4. Übungsblatt Analysis I

**Fragen:** (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Sind  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Nullfolgen und ist  $b_n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so ist auch  $(a_n/b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge.
- 2) Ist  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge und ist  $c_n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so gibt es zu jedem  $m \in \mathbb{N}$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß  $1/c_n > m$  ist für alle  $n \geq n_0$ .
- 3) *Richtig oder falsch:* Jede surjektive Abbildung einer endlichen Menge auf sich selbst ist injektiv.
- 4) *Richtig oder falsch:* Die Mengen  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$  sind gleichmächtig.
- 5) *Richtig oder falsch:* Alle überabzählbaren Mengen sind gleichmächtig.

**Aufgabe 6:** (5 Punkte)

- a) Berechnen Sie  $z_1 = (1 + 2i)(2 + i)$ ,  $z_2 = \frac{1 + 2i}{2 + i}$ ,  $z_3 = \frac{(1 + i)^{2012}}{2^{1000}}$  und  $z_{4/5} = \pm\sqrt{2}i$ !
- b) Zeigen Sie: Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $(a, b) \neq (0, 0)$  ist  $\left| \frac{a - ib}{a + ib} \right| = 1$ !

**Aufgabe 7:** (6 Punkte)

Finden Sie alle komplexen Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

- a)  $x^2 - 2x + 5 = 0$
- b)  $x^2 - 4ix - 5 = 0$
- c)  $x^2 - (4 + 6i)x - 3 + 10i = 0$

**Aufgabe 8:** (4 Punkte)

- a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß es für jede natürliche Zahl  $n$  genau  $(n + 1)!$  injektive Abbildungen einer  $n$ -elementigen Menge  $A$  in eine  $n + 1$ -elementige Menge  $B$  gibt!
- b) Wie viele surjektive und wie viele bijektive Abbildungen  $f: A \rightarrow B$  gibt es?