

7. September 2012

1. Übungsblatt Analysis I

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Für drei Mengen A, B, C ist $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
- 2) *Richtig oder falsch:* Die Menge $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ ist die Menge aller negativer ganzer Zahlen.
- 3) *Richtig oder falsch:* Die Menge aller nichtnegativer rationaler Zahlen ist mit der üblichen Addition und Multiplikation ein Körper.
- 4) *Richtig oder falsch:* Die Menge $\{0\}$ ist mit der üblichen Addition und Multiplikation ein Körper.
- 5) *Richtig oder falsch:* In jedem angeordneten Körper ist $1 > 0$.

Aufgabe 6: (4 Punkte)

$A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ sei die Menge aller Zweierpotenzen, $B = \{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ die Menge aller Quadratzahlen und $C = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \leq 100\}$.

- a) Was ist $A \cap B$?
- b) Was ist $A \setminus B$?
- c) Geben Sie die Elemente hat die Menge $(B \cap C) \setminus A$ explizit an!
- d) Wie viele Elemente hat $C \setminus B$?

Aufgabe 7: (6 Punkte)

- a) Zeigen Sie, daß in jedem Körper k gilt

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \text{für alle } a, b \in k!$$

- b) Leiten Sie daraus mit möglichst geringem Aufwand eine Formel $(a - b)^3$ ab!

Aufgabe 8: (5 Punkte)

Zeigen Sie:

- a) Sind a, b, c Elemente eines Körper k und ist $a \neq 0$, so gibt es stets ein Element $x \in k$, so daß $ax + b = c$ ist.
- b) Für zwei beliebige Elemente u, v eines (beliebigen) Körpers gilt:

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = \frac{u^2 + v^2}{2}.$$