

Beweis: Da f LEBESGUE-integrierbar ist, gibt es dazu eine approximierende Folge von Funktionen mit kompaktem Träger. Zu dieser wiederum können wir nach dem vorletzten Lemma für jedes $\varepsilon > 0$ eine Teilfolge finden, die außerhalb einer Menge Z mit $\mu(Z) < \varepsilon$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Diese Teilfolge, für ein fest gewähltes $\varepsilon \in (0, c)$, sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz außerhalb von Z gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq N \text{ und alle } x \notin Z.$$

Ist $f(x) > c$, ist für $x \notin Z$ und $k \geq N$ insbesondere $f_k(x) > c - \varepsilon$, d.h.

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > c\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_k(x) > c - \varepsilon\} \cup Z.$$

Nach der bereits bewiesenen TSCHEBYSCHEFF-Ungleichung für Funktionen mit kompaktem Träger ist das Maß der ersten Menge rechts höchstens gleich $\|f\|_1 / (c - \varepsilon)$, das von Z ist höchstens gleich ε . Somit ist

$$\mu^*\left(\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > c\}\right) \leq \frac{\|f\|_1}{c - \varepsilon} + \varepsilon.$$

Dies gilt für jedes $\varepsilon \in (0, c)$, und da die rechte Seite eine stetige Funktion in ε ist, bleibt es auch gültig, wenn wir ε gegen Null gehen lassen. Dann erhalten genau die zu beweisende Ungleichung. ■

Korollar: Für $f \in \text{Leb}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist $\|f\|_1 = 0$ genau dann, wenn f fast überall verschwindet.

Beweis: Falls f fast überall verschwindet, also fast überall gleich der Nullfunktion ist, sind die Integrale von f und der Nullfunktion über \mathbb{R}^n gleich, also beide Null. Wenn umgekehrt $\|f\|_1$ verschwindet, so ist nach der Ungleichung von TSCHEBYSCHEFF für jedes $c > 0$

$$\mu^*\left(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| > c\}\right) \leq \frac{\|f\|_1}{c} = 0,$$

also ist $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| > c\}$ für jedes $c > 0$ eine Nullmenge. Da die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, gilt dann das gleiche auch für

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{k \geq 0} \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| > \frac{1}{k}\},$$

das heißt, f verschwindet fast überall. ■

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir das weitere

Korollar: Für zwei Funktionen $f, g \in \text{Leb}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist genau dann $\|f - g\|_1 = 0$, wenn f und g fast überall gleich sind. ■

Eine Motivation für die Einführung des LEBESGUE-Integrals an Stelle des einfacheren RIEMANN-Integrals war die Beobachtung, daß der Vektorraum aller RIEMANN-integrierbarer Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} nicht vollständig ist. Als letztes Resultat dieses Paragraphen wollen wir uns überlegen, daß wir dieses Problem bei LEBESGUE-integrierbaren Funktionen nicht haben:

Satz: Der Raum $\text{Leb}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist vollständig.

Beweis: $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sei eine CAUCHY-Folge von Funktionen aus $\text{Leb}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Wir müssen zeigen, daß es eine Funktion $f \in \text{Leb}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gibt, gegen die diese Folge konvergiert.

Zu jeder der Funktionen f_k gibt es nach Definition der LEBESGUE-Integrierbarkeit eine approximierende Folge; die bezüglich der L^1 -Norm gegen f_k konvergiert; wir wählen daraus jeweils ein Folgenglied g_k mit der Eigenschaft, daß $\|f_k - g_k\|_1 < 1/k$ ist. Die Funktionen g_k sind Funktionen mit kompaktem Träger, und auch sie bilden eine CAUCHY-Folge, denn für jedes $\varepsilon > 0$ können wir zunächst ein $N_1 \in \mathbb{N}$ finden, so daß $\|f_\ell - f_k\|_1 < \frac{1}{3}\varepsilon$ ist für alle $k, \ell \geq N_1$. Ist $N \geq N_1$ eine natürliche Zahl, die gleichzeitig größer ist als $3/\varepsilon$, gilt dann für alle Indizes $k, \ell \geq N$

$$\begin{aligned} \|g_\ell - g_k\|_1 &= \|(g_\ell - f_\ell) + (f_\ell - f_k) + (f_k - g_k)\|_1 \\ &\leq \|f_\ell - g_\ell\|_1 + \|f_\ell - f_k\|_1 + \|f_k - g_k\|_1 \\ &< \frac{1}{\ell} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{k} \leq \frac{2}{N} + \frac{\varepsilon}{3} \leq 2 \times \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit ist $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge von Funktionen mit kompaktem Träger; wie wir weiter oben gesehen haben, gibt es dazu eine Teilfolge $(g_{k_\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$, so daß für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ die reelle Zahlenfolge $(g_{k_\nu}(x))_{\nu \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Für alle x , für die der Fall ist, bezeichnen wir den

Grenzwert der Folge mit $f(x)$, ansonsten setzen wir $f(x) = 0$. Damit ist eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, die offensichtlich LEBESGUE-integrierbar ist, denn der $(g_{k_\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$ ist eine approximierende Folge für f . Mit der Folge der g_{k_ν} konvergiert auch die der f_{k_ν} bezüglich der L^1 -Norm gegen f , denn

$$\|f_{k_\nu} - f\|_1 \leq \|f_{k_\nu} - g_{k_\nu}\|_1 + \|g_{k_\nu} - f\|_1,$$

wobei der erste Summand kleiner ist als $1/k_\nu$ und der zweite nach Definition von f gegen Null geht. Da die Folge der f_k eine CAUCHY-Folge ist, konvergiert dann aber auch die ganze Folge gegen f . ■

Aus dem Beweis folgt auch die zu erwartende Gleichung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k, \text{ denn}$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f - \int_{\mathbb{R}^n} f_k \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f - f_k) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f - f_k| = \|f - f_k\|_1.$$

§3: Das Lebesgue-Integral auf Teilmengen von \mathbb{R}^n

Nicht alle Funktionen sind auf ganz \mathbb{R}^n definiert, und selbst wenn sie es sind, interessiert oft nur ein Teilbereich. Das ist nicht neues gegenüber der Situation im Eindimensionalen, wo wir ja auch meist nicht über ganz \mathbb{R} , sondern nur über ein Intervall integrieren.

Wenn wir speziell die Konstante 1 über ein Intervall $[a, b]$ integrieren, erhalten wir als Ergebnis die Länge $b - a$ des Intervalls; entsprechend sollten bei Integration der Eins über eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ deren Fläche bzw. Volumen erhalten. Was ist aber das Volumen einer beliebigen Teilmenge eines \mathbb{R}^n ? Bislang kennen wir nur das Volumen achsenparalleler Quader, das wir entweder einfach als Produkt der Kantenlängen berechnen können oder aber kompliziert, indem wir die charakteristische Funktion des Quaders über den \mathbb{R}^n integrieren. Da wir für jede Teilmenge des \mathbb{R}^n eine charakteristische Funktion haben, können wir diese zweite Möglichkeit verallgemeinern:

Definition: Eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *meßbar*, wenn ihre charakteristische Funktion χ_B in $\text{Leb}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ liegt; als *Volumen* von B bezeichnen wir dann den Wert des Integrals $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_B$.

Beispiele nicht meßbarer Mengen lassen sich leicht angeben, beispielsweise der gesamte \mathbb{R}^n . Hier liegt der Grund allerdings darin, daß das Volumen eben nicht endlich ist. Interessanter ist die Frage, ob jede *beschränkte* Teilmenge von \mathbb{R}^n meßbar ist. Bislang konnte noch niemand ein explizites Beispiel einer nicht meßbaren beschränkten Teilmenge angeben, und vielleicht ist das sogar unmöglich, die *Existenz* solcher Mengen läßt sich aber beweisen. Das zentrale Ergebnis hierzu ist der folgende

Satz von Banach-Tarski: Für $n \geq 3$ gibt es zu je zwei beschränkten Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ eine natürliche Zahl m sowie disjunkte Zerlegungen $A = \bigcup_{k=1}^m A_k$ und $B = \bigcup_{k=1}^m B_k$ derart, daß für jedes k die Mengen A_k und B_k durch eine Kongruenzabbildung ineinander übergeführt werden können.

Kongruenzabbildungen sind zusammengesetzt aus Drehungen und Verschiebungen; jeder vernünftige Volumenbegriff sollte also den beiden Mengen A_k und B_k dasselbe Volumen zuordnen. (Nach der weiter unten betrachteten Transformationsformel hat das oben definierte Integral diese Eigenschaft.) Genauso sollte das Volumen einer disjunkten Vereinigung einfach die Summe der Volumina der Teilmengen sein; im obigen Satz müßten also, falls alle A_k und B_k meßbar wären, A und B dasselbe Volumen haben. Da wir für A und B beispielsweise zwei Würfel mit unterschiedlichen Kantenlängen nehmen können, ist das natürlich absurd. Somit können zumindest nicht alle der Mengen A_k und B_k meßbar sein; es muß auch nicht meßbare Mengen geben. Da der Beweis von BANACH und TARSKI nicht konstruktiv ist, liefert er allerdings kleine expliziten Beispiele für solche Mengen.



ALFRED TARSKI (1902–1983) wurde als ALFRED TEITELBAUM im damals russischen Warschau geboren. Er studierte zunächst Biologie, wechselte dann aber, nachdem er eine Logik-Vorlesung gehört hatte, zur Mathematik. Seine erste Arbeit, über Mengenlehre, erschien 1921, der Satz von BANACH-TARSKI 1924, nachdem er 1923 seinen Namen geändert hatte. Nach seinem Studium unterrichtete er zunächst an verschiedenen Warschauer Institutionen. 1930 traf er in Wien KURT GÖDEL (1908–1978) und publizierte, wohl dadurch beeinflusst,

1933 seine wohl bekannteste Arbeit, in der er *Wahrheit* in einem formalen System dadurch definierte, daß eine Formel in allen Interpretationen dieses Systems korrekt ist. Zwei Wochen vor dem deutschen Einmarsch in Polen war er 1939 zu einer Konferenz an die Harvard University gereist; er konnte dort bleiben und arbeitete an verschiedenen Universitäten, bis er 1942 nach Berkeley ging, wo er trotz seiner Emeritierung 1968 bis 1973 lehrte.

Nachdem wir über das LEBESGUE-Integral ein Volumen definiert haben, ist nun schon fast klar, wie wir ein Integrale über Teilmengen des \mathbb{R}^n mit beliebigen Integranden definieren:

Definition: $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion auf einer Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Falls die Funktion $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(x) = f(x)$ für $x \in B$ und $\tilde{f}(x) = 0$ sonst LEBESGUE integrierbar ist, definieren wir

$$\int_B f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x);$$

andernfalls existiert das linksstehende Integral nicht.

Kurz könnte man auch schreiben $\int_B f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_B(x)$, allerdings ist das insofern nicht ganz exakt, als $f(x)$ nicht für alle $x \in \mathbb{R}^n$ definiert sein muß. Interpretiert man das Produkt $f(x)\chi_B(x)$ allerdings so, daß es für alle $x \notin B$ verschwinden soll, unabhängig davon ob $f(x)$ definiert ist oder nicht, ist dies genau die obige Definition.

Im letzten Semester hatten wir Integrale in der Form $\int_a^b f(x) dx$ geschrieben; das neu eingeführte LEBESGUE-Integral dagegen schrieben wir zumindest bislang immer nur als $\int_B f$. Dies geschah vor allem, um das neue Integral vom alten zu unterscheiden; in der Literatur sind auch für das LEBESGUE-Integral eher Schreibweisen wie

$$\int_B f(x) dx, \quad \int_B f(x) d\mu \quad \text{oder} \quad \int_B f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

üblich. Für allem in Naturwissenschaft und Technik ist auch heute noch üblich, bei einem Integral über einen n -dimensionalen Bereich auch n Integralzeichen zu schreiben, also beispielsweise

$$\iint_B f(x, y) dx dy \quad \text{und} \quad \iiint_C f(x, y, z) dx dy dz$$

für $B \subseteq \mathbb{R}^2$ und $C \subseteq \mathbb{R}^3$. Für einen Integrationsbereich im allgemeinen n -dimensionalen Raum ergibt sich entsprechend ein Monstrum wie

$$\underbrace{\int \cdots \int}_B f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

n -mal

Da das oben definierte Integral ein Spezialfall des Integrals über den \mathbb{R}^n ist und dieses wiederum auf Quaderintegrale zurückgeführt werden kann, ist klar, daß auch für dieses Integral die „üblichen“ Rechenregeln gelten; etwas genauer ansehen wollen wir uns nur eine, die nicht in offensichtlicher Weise auf Regeln für eindimensionale Integrale zurückgeführt werden kann: die Transformationsformel.

Von den vielen Regeln zur expliziten Bestimmung einer Stammfunktion ist sicherlich die Substitutionsregel die nützlichste; die Transformationsformel verallgemeinert sie auf mehrdimensionale Integrale.

Die Idee im Eindimensionalen ist bekanntlich, daß wir die Integrationsvariable x als Funktion $x = \varphi(t)$ einer neuen Variablen t schreiben: Mit $a = \varphi(t_0)$ und $b = \varphi(t_1)$ ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) dt.$$

Genauso können wir auch bei einer Funktion mehrerer Veränderlicher diese als Funktionen neuer Variabler schreiben.

Beginnen wir der Anschaulichkeit halber mit einer Funktion $f(x, y)$ zweier Veränderlicher und schreiben wir diese als Funktionen

$$x = x(u, v) \quad \text{und} \quad y = y(u, v)$$

zweier neuer Variabler u und v . Ein wichtiges Beispiel, das man zur Veranschaulichung während der folgenden Rechnungen im Kopf behalten sollte, ist die Polarkoordinatendarstellung

$$x = x(r, \varphi) = r \sin \varphi \quad \text{und} \quad y = y(r, \varphi) = r \cos \varphi.$$

Wir betrachten zunächst ein Integral

$$\int_R f(x, y) dx dy$$

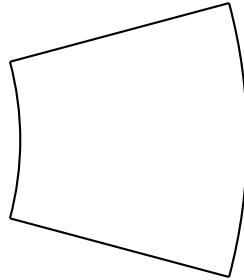
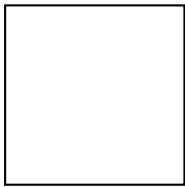
über ein achsenparalleles Rechteck R mit Eckpunkten

$$(u_0, v_0), \quad (u_0 + h, v_0), \quad (u_0, v_0 + k) \quad \text{und} \quad (u_0 + h, v_0 + k).$$

Wenn wir statt über x und y über u und v integrieren, müssen wir über jenen Bereich B' integrieren, in dem sich diese neuen Variablen bewegen, also die Menge

$$\{(x(u, v), y(u, v)) \mid u_0 \leq u \leq u_0 + h \quad \text{und} \quad v_0 \leq v \leq v_0 + k\}.$$

Diese ist natürlich im allgemeinen kein Rechteck, sondern eine krummlinig begrenzte Figur; im Beispiel der Polarkoordinaten etwa wäre sie ein Winkelbereich zwischen zwei Kreisbögen. (An den bei Polarkoordinaten etwas problematischen Nullpunkt als Ecke denken wir in diesen Zusammenhang lieber nicht; es ist klar, daß sein Einfluß bei immer kleiner werdenden Rechtecken für eine um den Nullpunkt beschränkte Funktion f immer kleiner wird.)



Trotzdem machen wir, wenn x und y differenzierbare Funktionen von u und v sind, bei kleinen Rechtecken keinen allzu großen Fehler, wenn wir die transformierte Menge als *Parallelogramm* betrachten, denn nach Definition der Differenzierbarkeit ist

$$x(u_0 + h, v_0) = x(u_0, v_0) + h \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) + o(h)$$

$$y(u_0 + h, v_0) = y(u_0, v_0) + h \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) + o(h)$$

$$x(u_0, v_0 + k) = x(u_0, v_0) + k \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) + o(k)$$

$$y(u_0, v_0 + k) = y(u_0, v_0) + k \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) + o(k)$$

und

$$x(u_0 + h, v_0 + k) = x(u_0, v_0) + h \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) + o(h)$$

$$+ k \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) + o(k)$$

$$y(u_0 + h, v_0 + k) = y(u_0, v_0) + h \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) + o(h)$$

$$+ k \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) + o(k);$$

wenn wir Terme der Größenordnung $o(h)$ und $o(k)$ vernachlässigen, ist die transformierte Menge also ein Parallelogramm mit Kantenvektoren

$$h \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad k \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}.$$

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist bekanntlich gleich dem Produkt der Kantenlängen mal dem Sinus des eingeschlossenen Winkels; falls wir die beiden Vektoren in den \mathbb{R}^3 einbetten, indem wir ihnen eine Null als dritte Komponente geben, ist das gerade gleich dem Betrag des Vektorprodukts, das hier nur in der dritten Komponente von Null verschieden ist; die Fläche des Parallelogramms ist also

$$hk \cdot \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right|.$$

Integrieren wir nicht über ein Rechteck, sondern über einen komplizierteren Integrationsbereich $B \subset \mathbb{R}^2$, so können wir diesen durch immer kleinere Rechtecke approximieren; führt man dies genauer aus, erhält man die folgende

Transformationsformel: $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine integrierbare Funktion auf $B \subseteq \mathbb{R}^2$, und die Variablen x, y seien als differenzierbare Funktionen $x = x(u, v)$ und $y = y(u, v)$ neuer Variabler u, v dargestellt. Ist dann $B' \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Integrationsbereich, für den die Abbildung

$$B' \rightarrow B; \quad (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$$

bijektiv ist, so gilt

$$\int_B f(x, y) dx dy = \int_{B'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right| du dv.$$

(Hier ist es nützlich, die Integrationsvariablen explizit durch dx, dy und so weiter anzugeben, da wir links und rechts in verschiedenen Koordinatensystemen arbeiten.)

Im Fall

$$x = r \cos \varphi \quad \text{und} \quad y = r \sin \varphi$$

der Polarkoordinaten ist

$$\frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \varphi \cdot (r \cos \varphi) - (-r \sin \varphi) \cdot \sin \varphi = r,$$

d.h.

$$\int_B f(x, y) dx dy = \int_{B'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Für diese Formel hätten wir eigentlich nicht den ganzen Apparat der Transformationsformel gebraucht; die obige Abbildung zeigt uns, wie wir die Fläche des Bilds eines Parallelogramms exakt ausrechnen können: Variiert r zwischen r und $r+h$ und φ zwischen φ und $\varphi+k$, so erhalten wir in der (x, y) -Ebene als Bild die Differenz zwischen zwei Kreissektoren mit Öffnungswinkel k und Radius $r+h$ beziehungsweise r ; der Flächeninhalt ist also

$$\frac{1}{2}k(r+h)^2 - \frac{1}{2}kr^2 = r \cdot kh + \frac{1}{2}kh^2.$$

Wenn h und k simultan gegen Null gehen, können wir kh^2 gegenüber kh vernachlässigen, der Flächeninhalt kh des Rechtecks aus der (r, φ) -Ebene wird also im wesentlichen nur mit r multipliziert – genau wie es die obige Rechnung auch zeigt.

Mit dieser Formel können wir beispielsweise noch einmal die Fläche eines Kreises ausrechnen: Die Punkte der Kreisscheibe B mit Radius R um den Nullpunkt haben Polarkoordinaten (r, φ) im Rechteck

$$B' = \{(r, \varphi) \mid 0 \leq r \leq R \quad \text{und} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi\};$$

die Fläche von B ist also

$$\int_B dx dy = \int_{B'} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\varphi = \pi R^2.$$

Im Vergleich zum letzten Abschnitt, wo wir das Integral (für $R=1$) in kartesischen Koordinaten ausrechneten und dazu die Funktion $\sqrt{1-x^2}$ integrieren mußten, ist diese Rechnung erheblich einfacher; die Transformationsformel leistet also genau das, was wir von einer verallgemeinerten Substitutionsregel erwarten: Bei *geschickter*, an das Problem

angepaßter Substitution kann sie die Berechnung eines Integrals erheblich vereinfachen.

Als letztes Beispiel wollen wir endlich einmal ein Integral ausrechnen, bei dem wir das Ergebnis nicht besser und viel einfacher durch elementargeometrische Überlegungen bekommen können: das Integral

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Man kann zeigen, daß die Stammfunktion von e^{-x^2} nicht in geschlossener Form durch elementare Funktionen ausdrückbar ist; Integration mittels Stammfunktion ist also zwecklos. Stattdessen benutzen wir folgenden Trick:

Durch Grenzübergang können wir den \mathbb{R}^2 als ein unendliches „Rechteck“ auffassen; daher ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \cdot I dy \\ &= I \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = I^2. \end{aligned}$$

In Polarkoordinaten entspricht \mathbb{R}^2 dem Bereich $B' = \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi)$; also ist das betrachtete Integral nach der Transformationsformel auch gleich

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{B'} e^{-r^2} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \right) d\varphi.$$

Die Stammfunktion des neuen Integranden $r e^{-r^2}$ ist leicht zu finden: Aus

$$\frac{d}{dr} e^{-r^2} = -2r e^{-r^2}$$

folgt sofort, daß

$$\int r e^{-r^2} dr = -\frac{1}{2} e^{-r^2} + C.$$

Damit können wir weiterrechnen und erhalten das Ergebnis

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^\infty r e^{-r^2} dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^\infty d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\varphi = \pi.$$

Also ist $I^2 = \pi$ und, da der Integrand von I überall positiv ist, folgt

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Zur Verallgemeinerung der Transformationsformel auf höhere Dimensionen beachten wir zunächst, daß der Term

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

in der Formel

$$\int_B f(x, y) dx dy = \int_{B'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right| du dv$$

gerade gleich der Determinanten der JACOBI-Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

des Koordinatenwechsels

$$(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$$

ist. Wir erwarten daher die folgende allgemeine Transformationsformel, die sich mit etwas linearer Algebra analog zum obigen Spezialfall zeigen läßt:

Transformationsformel: $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine integrierbare Funktion auf $B \subseteq \mathbb{R}^n$, und die Variablen x_1, \dots, x_n seien als differenzierbare

Funktionen

$$x_1 = x_1(u_1, \dots, u_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_n(u_1, \dots, u_n)$$

neuer Variabler u_1, \dots, u_n dargestellt. Ist dann $B' \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Integrationsbereich, für den die Abbildung

$$B' \rightarrow B; \quad u \mapsto x(u)$$

bijektiv ist, so gilt

$$\int_B f(x) dx_1 \cdots dx_n = \int_{B'} f(x(u)) |\det J_x(u)| du_1 \cdots du_n.$$