§ 2: Das Lebesgue-Integral auf $\mathbb{R}^n$

Bei der Definition eines mehrdimensionalen Integrals wollen wir gleichzeitig auch das eindimensionale Integral noch etwas verallgemeinern. Beim RIEMANN-Integral lernten wir die DIRICHLETsche Sprungfunktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

kennen als Beispiel einer nicht integrierbaren Funktion: Wenn wir sie über irgendeinem Intervall $[a, b]$ durch Treppenfunktionen approximieren, müssen wir für die RIEMANNschen Obersummen stets Stufen der Höhe eins wählen und für die Untersummen Stufen der Höhe null, denn in jedem noch so kleinen Intervall positiver Länge gibt es sowohl rationale als auch irrationale Zahlen.

Nun gibt es aber nur abzählbar viele rationale Zahlen, während die irrationalen Zahlen nicht abzählbar sind. Wenn wir ein Integral wollen, das mit Grenzwerten vertauschbar ist, müssen wir daher auch der DIRICHLETschen Sprungfunktion ein Integral zuordnen: Ist nämlich $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen, eine bijektive Abbildung also, so können wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls es ein } k \le n \text{ gibt mit } \varphi(k) = x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Da f_n somit nur an den endlich vielen Stellen $\varphi(1), \ldots, \varphi(n)$ von Null verschieden ist, ist f_n RIEMANN-integrierbar, und das Integral über jedes (endliche oder unendliche) Intervall verschwindet. Für $n \to \infty$ konvergiert die Folge der Funktionen f_n gegen die DIRICHLETsche Sprungfunktion, denn für die bezüglich der Abzählung durch φ n-te rationale Zahl $x = \varphi(n)$ ist $f_k(x) = 1$ für alle $k \ge n$, und für irrationale Zahlen verschwinden alle f_k. Wenn wir also ein Integral suchen, für das gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx ,$$

dann müssen wir auch Integranden wie die DIRICHLETsche Sprungfunktion zulassen und ihr für jedes Intervall das Integral Null zuordnen.

Dazu definieren wir nun die sogenannten Nullmengen; das sollen solche Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sein, auf die es bei der Integration nicht ankommt.

Definition: Eine Teilmenge $Z \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Nullmenge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Quader $Q_1, Q_2, \ldots$ gibt derart, daß

$$Z \subseteq \bigcup_{k\ge 1} Q_k \quad \text{und} \quad \sum_{k\ge 1} \mu(Q_k) < \varepsilon .$$

Man beachte, daß die Folge $Q_1, Q_2, \ldots$ nicht endlich sein muß; wir können auch abzählbar unendlich viele Quader nehmen. Deshalb ist beispielsweise $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ eine Nullmenge, denn wir können für eine bijektive Funktion $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ als „Quader“ Q_k einfach das einpunktige Intervall $[\varphi(k), \varphi(k)]$ nehmen. Genauso folgt auch allgemeiner, daß *jede* endliche oder abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist.

Umgekehrt muß nicht jede Nullmenge abzählbar sein: Beispielsweise ist auch $Z = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, also die Menge aller Punkte aus $\mathbb{R}^n$ mit letzter Koordinate Null eine Nullmenge, denn sie wird überdeckt durch die Quader

$$Q_k = \underbrace{[-k, k] \times \cdots [-k, k]}_{n-1 \text{ Faktoren}} \times [0, 0] ,$$

die allesamt das Volumen Null haben. Damit ist auch die Summe ihrer Volumina Null und somit kleiner als jedes vorgegebene $\varepsilon > 0$.

Ein Quader mit von Null verschiedenem Volumen kann dagegen nie eine Nullmenge sein: Nehmen wir für ε beispielsweise das halbe Volumen des Quaders, so kann es unmöglich eine Überdeckung durch Quader geben, deren Volumina sich zu einer Summe von kleiner ε addieren.

Gelegentlich wird es einfacher sein, statt mit kompakten Quadern mit Würfeln oder mit offenen Quadern zu arbeiten; das ist auch problemlos möglich nach dem folgenden

Lemma: Für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:
a) A ist eine Nullmenge.
b) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es offene Quader $Q_1, Q_2, \ldots$ derart, daß A in der Vereinigung aller Q_i enthalten ist und die Summe der Volumina der sämtlichen Q_i kleiner ist als ε.
c) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es Würfel $W_1, W_2, \ldots$ derart, daß A in der

Vereinigung aller W_i enthalten ist und die Summe der Volumina der sämtlichen W_i kleiner ist als ε.

Beweis: Natürlich folgt *a)* aus *c)*, denn jeder Würfel ist insbesondere ein Quader. Genauso schnell folgt *a)* aus *b)*, denn hier können wir einfach die offenen Quader Q_i durch ihre Abschlüsse ersetzen.

Für die Umkehrungen gehen wir aus von einer Nullmenge A und einem $\varepsilon > 0$. Dazu gibt es Quader $Q_1, Q_2, \ldots$ derart, daß A in der Vereinigung aller Q_i enthalten ist und die Summe der Volumina der sämtlichen Q_i kleiner ist als $\varepsilon/2$.

Zum Beweis von *b)* betrachten wir jeden Quader

$$Q_i = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n b_n] \quad \text{auch} \quad \widetilde{Q}_i = (\tilde{a}_1, \tilde{b}_1) \times \cdots \times (\tilde{a}_n \tilde{b}_n),$$

wobei $\tilde{a}_k$ und $\tilde{b}_k$ jeweils so gewählt sind, daß $\tilde{a}_k < a_k \le b_k < \tilde{b}_k$ ist und $\tilde{b}_k - \tilde{a}_k < \sqrt[n]{2}(b_k - a_k)$. Dann ist $\widetilde{Q}_i$ ein offener Quader, der Q_i enthält und höchstens das doppelte Volumen von Q_i hat. Somit ist die Summe der Volumina der $\widetilde{Q}_i$ kleiner als ε, und *b)* ist bewiesen.

Zum Beweis von *c)* können wir fast genauso vorgehen; jetzt wählen wir aber die $\tilde{a}_k, \tilde{b}_k$ so, daß sie rationale Zahlen sind und im übrigen dieselben Ungleichungen erfüllen wir oben. Dann ist

$$\widetilde{Q}_i = [\tilde{a}_1, \tilde{b}_1] \times \cdots \times [\tilde{a}_n \tilde{b}_n]$$

zwar kein Würfel, aber eine Vereinigung volumenfremder Würfel: Bezeichnet N den Hauptnenner aller $\tilde{b}_k - -\tilde{a}_k$, so können wir $\widetilde{Q}_i$ unterteilen in Würfel der Kantenlänge $1/N$, und die Summe der Volumina der sämtlichen so erhaltenen Würfel ist gleich der Summe der Volumina aller $\widetilde{Q}_i$, also kleiner als ε.

■

Einige weitere elementare Eigenschaften von Nullmengen sind im folgenden Lemma zusammengefaßt:

Lemma: *a)* Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.
b) Die Vereinigung endlich oder abzählbar vieler Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.

Beweis: a) Ist $Y \subseteq Z$ und $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Folge von Quadern Q_k, so daß Z in der Vereinigung aller Q_k liegt und die Summe der Volumina $\mu(Q_k)$ kleiner ist als ε. Da Y in Z enthalten ist, überdecken die Q_k auch Y.

b) $Z_1, Z_2, \ldots$ seien endlich oder abzählbar viele Nullmenge. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es dann für jedes Z_i Quader $Q_{i1}, Q_{i2}, \ldots$ derart, daß Z_i in der Vereinigung dieser Quader enthalten ist und die Summe der Volumina $\mu(Q_{ij})$ kleiner ist als $\varepsilon/2^i$. Nehmen wir nun alle Q_{ij} zusammen, so ist die Vereinigung der Z_i darin enthalten und die Summe der Volumina ist kleiner als $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$. Somit ist auch die Vereinigung der Z_i eine Nullmenge.

■

Lemma: Eine Nullmenge hat keine innere Punkte. Insbesondere ist keine nichtleere offene Menge Nullmenge.

Beweis: Ein Punkt $x \in Z \subseteq \mathbb{R}^n$ ist bekanntlich genau dann ein innerer Punkt, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß auch alle Punkte $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - y\| < \varepsilon$ in Z liegen. Da alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind, gibt es dann auch ein $\varepsilon > 0$, so daß dies für die Maximumsnorm gilt; Z enthält also für ein gewisses $\varepsilon > 0$ den offenen Würfel aus allen $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - y\|_\infty < \varepsilon$, insbesondere also auch den abgeschlossenen Würfel aus allen $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - y\|_\infty \le \varepsilon/2$, Dieser ist aber, wie wir uns oben überlegt haben, keine Nullmenge. Damit kann auch Z keine Nullmenge sein, denn nach dem vorigen Lemma ist jede Teilmenge einer Nullmenge selbst eine Nullmenge. Da jeder Punkt einer offenen Menge innerer Punkt ist, kann damit auch keine nichtleere offene Menge Nullmenge sein.

■

Wie wir oben gesehen haben, ist die durch $x_n = 0$ definierte Hyperebene in $\mathbb{R}^n$ eine Nullmenge. Entsprechend sollte man erwarten, daß *jede* Teilmenge einer Dimension echt kleiner n Nullmenge ist. Bevor wir so etwas beweisen können, müßten wir aber zuallererst einmal wissen, was die Dimensionen einer *beliebigen* Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Wir können nicht einfach sagen, eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sei m-dimensional, wenn sie sich als Bild einer Teilmenge $A = \varphi(B)$ einer injektiven Abbildung einer Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^m$ darstellen läßt, denn durch eine Variante des aus Kapitel 1 bekannten ersten CANTORschen Diagonalverfahrens läßt sich zeigen, daß $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ gleichmächtig sind, daß es also eine bijektive

Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gibt. Mit vollständiger Induktion folgt dann leicht, daß es für beliebige $n, m \in \mathbb{N}$ auch eine bijektive Abbildung $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ gibt.

Als nächsten Versuch könnten wir verlangen, daß die Abbildung φ *stetig* sein soll. Leider bekommen wir auch damit Probleme, zumindest wenn wir auch surjektive Abbildungen an Stelle von bijektiven zulassen: 1890 konstruierte GUISEPPE PEANO eine stetige surjektive Abbildung $\varphi\colon [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$. Die Idee dazu, in einer 1891 von DAVID HILBERT angegebenen Vereinfachung, ist folgende: Wir teilen im ersten Schritt sowohl das Intervall $I = [0, 1]$ als auch das Quadrat $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ in vier gleich große Teilintervalle *bzw.* -quadrate. Bei I soll das i-te Teilintervall einfach das von $(i-1)/4$ bis $i/4$ sein, bei Q wird die Sache etwas komplizierter, denn wir wollen eine Unterteilung, bei der das i-te Quadrat stets benachbart zum $(i+1)$-ten ist. Das können wir zum Beispiel durch das Schema $\begin{smallmatrix}2&3\\1&4\end{smallmatrix}$ erreichen.

Für $k > 1$ gehen wir von der vorhandenen Unterteilung des k-ten Schritts aus und unterteilen wieder jedes einzelne Intervall oder Quadrat in vier Teile, so daß Quadrate mit aufeinanderfolgender Nummer benachbart sind. Im zweiten Schritt könnten wir dazu nach dem Schema

$$\begin{array}{cccc} 6 & 7 & 10 & 11 \\ 5 & 8 & 9 & 12 \\ 4 & 3 & 14 & 13 \\ 1 & 2 & 15 & 16 \end{array}$$

vorgehen: Die ersten vier Quadrate der k-ten Unterteilung sollen im ersten der $(k-1)$-ten liegen, die nächsten vier im zweiten, und so weiter. Damit auch noch nach der Unterteilung aufeinanderfolgende Quadrate benachbart sind, müssen wir bei der Vierteilung darauf achten, daß das jeweils vierte Teilquadrat an das nächste Quadrat der vorigen Stufe angrenzt; die Numerierung der neuen Quadrate kann also nicht immer nach dem Schema $\begin{smallmatrix}2&3\\1&4\end{smallmatrix}$ erfolgen, sondern wir müssen beispielsweise auch die relative Reihenfolge $\begin{smallmatrix}4&3\\1&2\end{smallmatrix}$ zulassen.

Jeder Punkt $x \in I$ kann nun definiert werden durch eine Intervallschachtelung aus Intervallen J_k, wobei J_k eines der Teilintervalle der k-ten Stufe ist. (Bei Punkten der Form $i/4^k$ haben wir hier mehrere Möglichkeiten, was jedoch für das Ergebnis irrelevant ist.) Die Abbildung wird

nun so konstruiert, daß das i-te Intervall der k-ten Unterteilung auf das i-te Quadrat der k-ten Unterteilung von Q abgebildet werden soll. Man überlegt sich leicht, daß wir dadurch eine Folge von ineinander enthaltenen Quadraten bekommen, deren waagrechte und senkrechte Kanten jeweils Intervallschachtelungen für reelle Zahlen y und z sind. Mit der Definition $\varphi(x) = (y, z)$ ist die HILBERTsche Kurve erklärt, und man kann ohne größere Schwierigkeiten zeigen, daß sie alle behaupteten Eigenschaften hat. φ ist übrigens auch ein Beispiel einer stetigen, aber nirgends differenzierbaren Funktion.

GUISEPPE PEANO (1858–1932) war Sohn eines Landarbeiters und wuchs auf einem Bauernhof nahe Cuneo im Piemont auf. 1870 brachte ihn ein Bruder seiner Mutter nach Turin, wo er weiterführende Schulen und schließlich die Universität besuchte. Dort wurde er 1880 Assistent und 1890 Professor. Bekannt ist er unter durch einen Existenzsatz für Lösungen von Differentialgleichungen und ein Beispiel für nichteindeutige Lösungen. Die berühmten PEANO-Axiome für die natürlichen Zahlen veröffentlichte er 1889, und zwar aus unerfindlichen Gründen in lateinischer Sprache. Später beschäftigte er sich vor allem mit Logik.

DAVID HILBERT (1862–1943) wurde in Königsberg geboren, wo er auch zur Schule und zur Universität ging. Er promovierte dort 1885 mit einem Thema aus der Invariantentheorie, habilitierte sich 1886 und bekam 1893 einen Lehrstuhl. 1895 wechselte er an das damalige Zentrum der deutschen wie auch internationalen Mathematik, die Universität Göttingen, wo er bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1930 lehrte. Seine Arbeiten umfassen ein riesiges Spektrum aus unter anderem Invariantentheorie, Zahlentheorie, Geometrie, Funktionalanalysis, Logik und Grundlagen der Mathematik sowie auch zur Relativitätstheorie. Er gilt als einer der Väter der modernen Algebra.

Das Beispiel der von PEANO und HILBERT konstruierten Kurven zeigt insbesondere, daß das Bild einer Nullmenge unter einer stetigen Abbildung keine Nullmenge mehr sein muß: Identifizieren wir das Einheitsintervall mit der Menge aller Punkte $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ mit $0 \leq x \leq 1$, so ist dies eine Nullmenge; das Bild dieser Menge unter der oben konstruierten stetigen Abbildung $(x,0) \mapsto \varphi(x)$ aber ist ein Quadrat mit Seitenlänge eins, also definitiv keine Nullmenge.

Solche Beispiele sind nicht mehr möglich, wenn wir an Stelle der bloßen Stetigkeit eine sogenannte LIPSCHITZ-Bedingung fordern:

Definition: Die Funktion $f\colon Z \to \mathbb{R}^n$ auf der Teilmenge $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ erfüllt eine LIPSCHITZ-Bedingung mit LIPSCHITZ-Konstante $\lambda > 0$, wenn für alle $x, y \in Z$ gilt:

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \le \lambda \|x - y\|_\infty \, .$$

Ist Z eine offene Menge, so ist eine solche Funktion nicht nur stetig, sondern sogar gleichmäßig stetig, denn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt für $\delta = \varepsilon/\lambda$, daß $\|f(x) - f(y)\|_\infty < \varepsilon$ ist wann immer $\|x - y\|_\infty < \delta$ ist.

RUDOLF OTTO SIGISMUND LIPSCHITZ (1832–1903) wurde in Königsberg geboren und starb in Bonn. Am besten bekannt ist er durch die gerade definierte LIPSCHITZ-Bedingung die für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von Differentialgleichungen eine große Rolle spielt. Sein Hauptarbeitsgebiet waren Differentialgleichungen und andere Hilfsmittel der mathematischen Physik,beispielsweise Matrizengruppen. Seine Arbeiten über dynamische Systeme haben wichtige Anwendungen in der Himmelsmechanik.

Lemma: Erfüllt die Abbildung $f\colon Z \to \mathbb{R}^n$ eine LIPSCHITZ-Bedingung und ist $Z \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, so ist auch $f(Z)$ eine Nullmenge.

Beweis: λ sei eine LIPSCHITZ-Konstante für f und $Q \subset \mathbb{R}^n$ sei ein kompakter Würfel. Wir wollen uns als erster überlegen, daß das Bild $f(Q \cap Z)$ in einem Würfel $\widetilde{Q}$ liegt mit $\mu(\widetilde{Q}) \le (2\lambda)^n \mu(Q)$. Falls $Z \cap Q$ leer ist, gibt es nichts zu beweisen; andernfalls sei x ein Punkt aus dem Durchschnitt. Ist a die Kantenlänge von Q, so erfüllt jeder Punkt $y \in Q$ die Ungleichung $\|x - y\|_\infty \le a$, denn in keiner der n Koordinaten können sich zwei Punkte eines Würfels um mehr als a unterscheiden. Wegen der LIPSCHITZ-Bedingung ist daher für alle $y \in Q \cap Z$

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \le \lambda \|x - y\|_\infty = \lambda a \, .$$

Somit liegen alle diese Punkte im Würfel

$$\widetilde{Q} = \left\{ z \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|f(x) - z\|_\infty \le \lambda a \right\}$$

mit Mittelpunkt $f(x)$ und Kantenlänge $2\lambda a$. Sein Volumen ist

$$\mu(\widetilde{Q}) = (2\lambda a)^n = (2\lambda)^n a^n = (2\lambda)^n \mu(Q) \, ,$$

wie behauptet.

Um nun zu zeigen, daß $f(Z)$ eine Nullmenge ist, geben wir uns ein $\varepsilon > 0$ vor. Da Z eine Nullmenge ist, können wir Würfel $Q_1, Q_2, \dots$ finden, so daß Z in der Vereinigung dieser Würfel liegt und die Summe von deren Volumina kleiner ist als $\varepsilon/(2\lambda)^n$. Für jeden dieser Würfel liegt $f(Z \cap Q_i)$ in einer Würfel mit Volumen kleiner $(2\lambda)^n \mu(Q_i)$, also wird $f(Z)$ von diesen Würfeln überdeckt und ihr Gesamtvolumen ist kleiner als ε. Damit ist $f(Z)$ als Nullmenge erkannt. ■

LIPSCHITZ-Konstanten sind oft nicht leicht direkt zu finden; darin unterscheiden sie sich nicht von den Konstanten aus dem BANACHschen Fixpunktsatz. Dort haben wir in den Übungen gesehen, daß für differenzierbare Funktionen der Mittelwertsatz der Differentialrechnung hier oft nützlich ist. Genauso wird das auch hier sein; bevor wir das zeigen können, müssen wir uns zunächst überlegen, daß sich beliebige offene Mengen durch Quader „ausschöpfen“ lassen:

Lemma: Jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ läßt sich als Vereinigung höchstens abzählbar vieler volumenfremder (kompakter) Quader schreiben.

Beweis: Wir bezeichnen einen Würfel der Form

$$\left[\frac{k_1}{2^g}, \frac{k_1+1}{2^g}\right] \times \cdots \times \left[\frac{k_1}{2^g}, \frac{k_1+1}{2^g}\right] \subset \mathbb{R}^n$$

als *Baustein* der Generation $g \in \mathbb{N}$. Offensichtlich ist $\mathbb{R}^n$ für jedes g die volumenfremde Vereinigung aller Bausteine der Generation g, und es gibt abzählbar viele solcher Bausteine. E_g sei die Vereinigung aller Bausteine der Generation g, die vollständig in U enthalten sind; das ist offensichtlich für jedes g eine Teilmenge von U, und auch die Vereinigung aller E_g liegt in U.