mengen von $\mathbb{R}^n$. Nach diesem Satz wird sich sicherlich mancher Leser fragen, warum man kompakte Mengen nicht einfach als abgeschlossene und beschränkte Mengen *definiert;* das wäre auf jeden Fall einfacher, als die Definition mit endlichen Teilüberdeckungen. Tatsächlich gibt es Lehrbücher der Analysis, in denen so eine Definition zu finden ist.

In der Mathematik spielt der Begriff der Kompaktheit allerdings eine sehr große Rolle nicht nur für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, sondern auch für viel allgemeinere Räume. Dort ist der Satz von HEINE-BOREL im allgemeinen falsch; teilweise läßt sich sogar nicht einmal definieren, was eine beschränkte Teilmenge sein soll. Im übrigen lassen sich Überdeckungen ohnehin nicht vermeiden; für die meisten Anwendungen kompakter Mengen müssen wir mit dieser Definition arbeiten. Ein Beispiel dafür ist die für uns wichtigste Anwendung kompakter Mengen, die Existenz von Maxima und Minima; diese beruht auf dem folgenden

Lemma: $f: D \to \mathbb{R}^m$ sei eine stetige Abbildung auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$, und $X \subseteq D$ sei kompakt. Dann ist auch $f(X) \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakt.

Beweis: $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ sei eine offene Überdeckung von $f(X)$. Da f eine stetige Abbildung ist, sind dann auch die Urbilder

$$f^{-1}(U_i) = \left\{x \in D \;\middle|\; f(x) \in U_i\right\}$$

offen, und natürlich bilden sie eine Überdeckung von X. Diese Überdeckung hat wegen der Kompaktheit von X eine endliche Teilüberdeckung $\{f^{-1}(U_{i_1}), \dots, f^{-1}(U_{i_r})$. Damit überdecken $U_{i_1}, \dots, U_{i_r}$ die Menge $f(X)$, die vorgegebene Überdeckung hat also eine endliche Teilüberdeckung.

■

Lemma: $f: D \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Abbildung auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$, und $X \subseteq D$ sei kompakt. Dann nimmt f sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum an; es gibt also Elemente x_m und x_M aus X, so daß für alle $x \in X$ gilt: $f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)$.

Beweis: Nach dem vorigen Lemma ist $f(X)$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$, also insbesondere beschränkt Somit existieren sowohl das Infimum m als auch das Supremum M von $f(X)$. Wir müssen zeigen, daß sie in $f(X)$ liegen.

Falls einer dieser beiden Punkte nicht in der abgeschlossenen Menge $f(X)$ läge, müßte er in ihrem offenen Komplement $\mathbb{R} \setminus f(X)$ liegen und hätte damit eine ε-Umgebung, die ganz in $\mathbb{R} \setminus f(X)$ läge. Im Falle des Supremums würde dies bedeuten, daß beispielsweise auch $M - \frac{\varepsilon}{2}$ eine obere Schranke von $f(X)$ wäre, im Widerspruch zur Definition des Supremums als *kleinster* oberer Schranke; im Falle des Infimums wäre entsprechend $m + \frac{\varepsilon}{2}$ eine untere Schranke.

Daher müssen m und M in $f(X)$ liegen, es gibt also Elemente x_m und x_M in X, so daß $f(x_m) = m$ und $f(x_M) = M$ ist.

■

Als Beispiel für die Nützlichkeit dieses Lemmas wollen wir die relativen Maxima und Minima der Funktion $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 \le 1$ bestimmen.

Der Gradient von f ist $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2\sin x \cos x \\ -2\sin y \cos y \end{pmatrix}$; beide Komponenten verschwinden genau dann, wenn entweder der Sinus oder der Kosinus verschwindet, wenn also x und y halbzahlige Vielfache von π sind. Da $\frac{\pi}{2}$ größer ist als eins, kommt unter der angegebenen Nebenbedingung hierfür nur der Nullpunkt in Frage. Dort ist $f(0,0) = 2$ in der Tat ein (absolutes) Maximum der Funktion, denn der Kosinus kann nirgends größer als eins werden.

Bleiben die Extrema auf dem Rand $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Da der Gradient $\nabla g = \binom{2x}{2y}$ von g dort nirgends verschwindet, muß es für jedes solche Extremum ein λ geben mit $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$, also konkret

$$\sin x \cos x = -\lambda x \quad \text{und} \quad \sin y \cos y = -\lambda y\,.$$

Setzen wir $x = 0$ oder $y = 0$, ist jeweils eine der beiden Gleichungen erfüllt. Wegen der Nebenbedingung muß die jeweils andere Koordinate Betrag eins haben, und λ bestimmt sich aus der jeweils anderen Gleichung. Wir haben somit vier Kandidaten $(0,1)$, $(0,-1)$ $(1,0)$ und $(-1,0)$. In allen vier Punkten ist

$$f(x,y) = \cos^2 0 + \cos^2 1 = 1 + \cos^2 1\,.$$

Falls weder x noch y verschwinden, können wir dividieren und erhalten

die deutlich unangenehmeren Gleichungen
$$-\lambda = \frac{\sin x \cos x}{x} = \frac{\sin y \cos y}{y}\,.$$
Um diese etwas zu vereinfachen, beachten wir, daß nach EULER gilt
$$\sin x \cos x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\cdot\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{4i} = \frac{\sin 2x}{2}\,,$$
wir haben also die etwas einfachere Gleichung
$$-\lambda = \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{\sin 2y}{2y}\,.$$
Wir wollen daraus folgern, daß $x = \pm y$ sein muß. Dazu müssen wir die Funktion $h(t) = \sin(t)/t$ genauer untersuchen. Offensichtlich ist $h(t) = h(-t)$, und wir wissen auch, daß nach DE L'HÔPITAL der Grenzwert für $t \to 0$ gleich eins ist. Wir wollen uns überlegen, daß die Funktion für $0 < t < \pi$ monoton fällt. Das ist genau dann der Fall, wenn ihre Ableitung
$$h'(t) = \frac{t\cos t - \sin t}{t^2}$$
dort nirgends positiv wird. Das Vorzeichen dieser Ableitung ist das ihres Zählers. Dieser verschwindet an der Stelle $t = 0$; da seine Ableitung
$$(t\cos t - \sin t)' = \cos t - t\sin t - \cos t = -t\sin t$$
für $0 < t < \pi$ negativ ist, fällt er im Intervall $(0, \pi)$ monoton, ist dort also negativ. Somit ist h dort monoton fallend; da wir nur x- und y-Werte vom Betrag höchstens eins betrachten, ist also $h(2x) = h(2y)$ nur dann möglich, wenn $y = \pm x$ ist. Eingesetzt in die Nebenbedingung führt das auf die Gleichung
$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\text{und}\quad y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,;$$
wir haben also wieder vier Kandidaten, und in allen vieren haben wir denselben Funktionswert
$$f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$
Wir müssen noch entscheiden, wo Maxima und wo Minima angenommen werden. Da die Kreislinie offensichtlich abgeschlossen und beschränkt ist, ist sie kompakt, wir wissen also, daß f dort sowohl sein

Maximum als auch sein Minimum annimmt. Da f und g differenzierbar sind, muß dies bei einem (oder mehreren) unserer acht Kandidaten passieren. Die Funktionswerte dort sind
$$1 + \cos^2 1 \approx 1{,}29192658 \quad\text{und}\quad 2\cos^2\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}15594369$$
ist, wird in den Punkten $(\pm 1, 0)$ und $(0, \pm 1)$ das Minimum (auf dem Rand) angenommen und in den Punkten $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$ das Maximum.

Das absolute Maximum auf der gesamten Kreisscheibe ist, wie wir schon wissen, die im Nullpunkt angenommene Zwei; das absolute Minimum existiert wegen der Kompaktheit der Kreisscheibe ebenfalls und muß damit in den Punkten $(\pm 1, 0)$ und $(0, \pm 1)$ angenommen werden.

Puristen, die ohne numerische Näherungswerte auskommen möchten, können natürlich auch ohne Taschenrechner oder Computer entscheiden, welcher der beiden Werte größer ist; allerdings muß man dazu etwas tricksen. Eine Möglichkeit wäre etwa die folgende:

Da π zwischen drei und vier liegt, ist
$$\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{4} > \cos 1 > \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} > \cos 1 > \frac{1}{2}\,,$$
also $1\frac{1}{4} < 1 + \cos^2 1 < 1\frac{1}{2}$. (Zur Erinnerung: $\frac{\pi}{4}$ entspricht 45° und $\frac{\pi}{3}$ ist im Winkelmaß 60°.)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ liegt in der Nähe von $\frac{\pi}{4}$, also sollte $\cos\frac{\sqrt{2}}{2}$ ungefähr bei $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ liegen, d.h.
$$2\cos^2\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$$
sollte kleiner sein als $1 + \cos^2 1$. Nach der TAYLOR-Reihe A
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$
des Kosinus ist $\cos\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{1}{2\cdot 2!} + \frac{1}{2^2\cdot 4!} - \frac{1}{2^3\cdot 6!} + \cdots$.

Da der Betrag der Summanden monoton fallend ist, muß jede Summe aus einem negativen und dem darauffolgenden positiven Summanden negativ sein, d.h.
$$\cos\frac{\sqrt{2}}{2} < 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4\cdot 24} = \frac{4\cdot 24 - 24 + 1}{4\cdot 24} = \frac{73}{96}\,.$$
Um zu sehen, daß $2\cdot\cos^2\frac{\sqrt{2}}{2} < 1 + \cos^2 1$ ist, reicht es somit, wenn wir zeigen, daß
$$\left(\frac{73}{96}\right)^2 < \frac{5}{8}$$
ist. Diese Behauptung ist äquivalent zu
$$8\cdot 73^2 < 5\cdot 96^2 \quad\text{oder}\quad 2\cdot 73^2 < 5\cdot 48^2 \quad\text{oder}\quad 10658 < 11520\,,$$
also richtig – ganz in Übereinstimmung mit den numerischen Resultaten.

Mit dem Lemma, wonach eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum annimmt, können wir auch eine am Ende von §2*b)* aufgestellte und seither mehrfach wiederholte Behauptung beweisen:

Lemma: Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.

Beweis: Es genügt zu zeigem, daß jede Norm $\|\cdot\|$ äquivalent ist zur Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Die eine Richtung ist einfach: Sind

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Koordinateneinheitsvektoren in $\mathbb{R}^n$, so können wir $x = (x_1, \ldots, x_n)$ schreiben als $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$; nach der Dreiecksungleichung und der sonstigen Eigenschaften einer Norm ist

$$\begin{aligned} \|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_ie_i \right\| &\le \sum_{i=1}^n \|x_ie_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i|\,\|e_i\| \\ &\le \|x\|_\infty \sum_{i=1}^n \|e_i\| \ , \end{aligned}$$

denn $\|x\|_\infty$ ist ja das Maximum der Beträge der x_i. Die Summe der Normen der Einheitsvektoren ist eine positive Konstante; damit haben wir gezeigt, daß es eine solche Konstante c gibt mit der Eigenschaft, daß $\|x\| \le c\,\|x\|_\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Für die andere Abschätzung überlegen wir uns zunächst, daß jede Norm eine stetige Funktion von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ ist. Der Begriff der Stetigkeit hängt ab von einer Norm; wie stets in bisherigen Verlauf der Vorlesung arbeiten wir mit der Maximumsnorm (oder der dazu äquivalenten EUKLIDischen). Auf $\mathbb{R}$ ist das einfach der Betrag; wir müssen also zeigen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - y\|_\infty < \delta$ gilt: $\big|\|x\| - \|y\|\big| < \varepsilon$.

Nach der Dreiecksungleichung ist

$$\|x\| = \|y + (x - y)\| \le \|y\| + \|x - y\| \quad \text{und}$$
$$\|y\| = \|x + (y - x)\| \le \|x\| + \|y - x\| \ ,$$

also sind $\|x\| - \|y\|$ und $\|y\| - \|x\|$ beide kleiner als $\|x - y\| = \|y - x\|$, und damit ist

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x - y\| \le c\,\|x - y\|_\infty \ .$$

Setzen wir daher $\delta = \varepsilon/c$, so ist $\big|\|x\| - \|y\|\big| < \varepsilon$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - y\|_\infty < \delta$. Damit ist die Stetigkeit der Norm $\|\cdot\|$ bewiesen.

Nun betrachten wir den Würfel

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|x\|_\infty = 1 \right\}.$$

Er ist offensichtlich abgeschlossen und beschränkt, nach dem Satz von HEINE-BOREL also kompakt.

Als stetige Funktion nimmt die Norm auf W sowohl ein Minimum als auch ein Maximum an; es gibt daher Konstanten c_1 und c_2, so daß $c_1 \le \|x\| \le c_2$ für alle $x \in W$. Beide Konstanten sind positiv, denn $\|x\|$ verschwindet nur für $x = 0$, und dieser Punkt liegt nicht in W.

Ein beliebiges $x \ne 0$ können wir schreiben als

$$x = \|x\|_\infty \cdot \frac{x}{\|x\|_\infty} \ ,$$

wobei der zweite Faktor in W liegt. Seine Norm

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| = \left\| \frac{1}{\|x\|_\infty} \cdot x \right\| = \frac{1}{\|x\|_\infty}\,\|x\| = \frac{\|x\|}{\|x\|_\infty}$$

liegt zwischen c_1 und c_2, also ist

$$c_1 \le \frac{\|x\|}{\|x\|_\infty} \le c_2 \quad \text{oder} \quad c_1\,\|x\|_\infty \le \|x\| \le c_2\,\|x\|_\infty \ .$$

Damit ist die Äquivalenz der beiden Normen bewiesen. ■

Als weitere Anwendung kompakter Mengen wollen wir die gleichmäßige Stetigkeit, die wir für Funktionen einer Veränderlichen in Kapitel 4 zur Konstruktion des RIEMANN-Integrals benötigten, auch für Funktionen mehrerer Veränderlicher einführen:

Definition: Eine Abbildung $f: D \to \mathbb{R}^m$ auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *gleichmäßig stetig* auf der Teilmenge $X \subseteq D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß gilt: Für alle Punkte $x, y \in X$ mit $\|x - y\| < \delta$ ist $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Im Eindimensionalen konnten wir zeigen, daß jede stetige Funktion auf abgeschlossenen Teilintervallen ihres Definitionsbereichs gleichmäßig stetig ist; hier gilt entsprechend

Lemma: Eine stetige Abbildung $f: D \to \mathbb{R}^m$ auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist auf jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq D$ gleichmäßig stetig.

Beweis: Da f auf D stetig ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem x aus D ein $\delta > 0$, so daß gilt: $\|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$, falls $\|y - x\| < \delta$. Dieses δ hängt sowohl von ε als auch von x ab. Wir müssen zeigen, daß wir zumindest für die $x \in K$ ein gemeinsames δ finden können.

Dazu halten wir ε fest und wählen zu jedem $x \in K$ ein $\delta_x > 0$, so daß gilt: Für $\|y - x\| < \delta_x$ ist $\|f(y) - f(x)\| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Offensichtlich bilden die Mengen

$$U_x = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|y - x\| < \tfrac{1}{2}\delta_x \right\}$$

eine offene Überdeckung von K; da K kompakt ist, gibt es eine Teilüberdeckung durch endlich viele Mengen $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$. Wir bezeichnen die kleinste unter den n Zahlen $\frac{1}{2}\delta_{x_j}$ mit δ.

Damit liegt jedes $x \in K$ in mindestens einer der Mengen U_{x_j}, und ist $\|y - x\| < \delta$, so ist

$$\left\|y - x_j\right\| \le \|y - x\| + \left\|x - x_j\right\| < 2\delta \le \delta_{x_j}\,;$$

nach Definition von δ_{x_j} ist daher

$$\left\|f(y) - f(x_j)\right\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \left\|f(x) - f(x_j)\right\| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

also $\|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$. Dies zeigt die gleichmäßige Stetigkeit von f auf K. ■

b) Zusammenhängende Mengen

Die kompakten Mengen in letzten Abschnitt sollten eine Art Verallgemeinerung abgeschlossener Intervalle sein, und zumindest was die

Existenz von Maxima und Minima stetiger Funktionen betrifft, leisten sie auch das, was wir von ihnen erwarteten.

Umgekehrt ist aber nicht jede kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall: Die Vereinigung $[-4, -2] \cup [2, 4]$ ist sicherlich abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Natürlich können wir nicht erwarten, daß für Funktionen auf einer solchen Menge der Zwischenwertsatz gilt. Um auch diesen aufs Mehrdimensionale zu verallgemeinern, brauchen wir einen neuen Begriff, der etwas mit der Intervalleigenschaft zu tun haben sollte.

Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten: Ein Intervall enthält zu zwei Punkten x, y stets auch deren Verbindungsstrecke; diese Eigenschaft könnten wir auch im Mehrdimensionalen fordern. Etwas allgemeiner könnten wir aber statt einer geradlinigen Verbindung einfach *irgendeine* Verbindungskurve zwischen je zwei Punkten fordern. Schließlich könnten wir auch ganz auf Verbindungskurven verzichten und stattdessen eine andere Eigenschaft des obigen Gegenbeispiels ausnutzen: Die Vereinigung $[-4, -2] \cup [2, 4]$ ist enthalten in der Vereinigung der beiden offenen Intervalle $(-5, -1)$ und $(1, 5)$, und diese offenen Intervalle haben leeren Durchschnitt.

Alle drei Ansätze sind nützlich und haben deshalb eigene Namen:

Definition: *a)* Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in X$ auch deren Verbindungsstrecke ganz in X liegt.
b) X heißt *wegzusammenhängend*, wenn es für alle $x, y \in X$ eine ganz in X liegende Kurve gibt, die diese Punkte verbindet, d.h. eine stetige Abbildung $\gamma: D \to \mathbb{R}^n$ auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ und $\gamma\big([0, 1]\big) \subseteq X$.
c) X heißt *zusammenhängend*, wenn gilt: Sind $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei offene Mengen mit leerem Durchschnitt und liegt X in der Vereinigung $U \cup V$, so liegt X ganz in einer der beiden Mengen.

Von diesen drei Forderungen ist die Konvexität die stärkste, der Zusammenhang die schwächste. Genauer gilt:

Lemma: *a)* Jede konvexe Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist auch wegzusammenhängend.

b) Jede wegzusammenhängende Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist auch zusammenhängend.

Beweis: a) ist klar: Wenn für je zwei Punkte $x, y \in X$ deren Verbindungsstrecke $\big\{(1-t)x+ty \bigm| 0 \le t \le 1\big\}$ in X liegt, können wir einfach diese Strecke als Verbindungskurve nehmen, d.h. wir definieren

$$\gamma \colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto (1-t)x + ty \end{cases} .$$

Dann ist $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$, und für alle $t \in [0,\ 1]$ liegt $\gamma(t)$ in X.

b) Die wegzusammenhängende Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sei enthalten in der Vereinigung der beiden offenen Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $U \cap V = \emptyset$. Falls X selbst die leere Menge ist, liegt X sowohl in U als auch in V, und wir sind fertig. Andernfalls gibt es mindestens einen Punkt $x \in X$. Dieser muß entweder in U oder in V liegen; indem wir gegebenefalls die Bezeichnungen vertauschen, können wir annehmen, daß x in U liegt. Wir müssen zeigen, daß dann auch alle anderen Punkte $y \in X$ in U liegen.

Nach Voraussetzung gibt es eine Kurve γ, die x und y miteinander verbindet. Wir wollen uns überlegen, daß diese ganz in U liegen muß. Dazu betrachten wir

$$s = \sup\big\{u \in [0,1] \bigm| \gamma(t) \in U \text{ für alle } t \in [0,u)\big\} .$$

Falls $s < 1$ wäre, könnte $\gamma(s)$ nicht in U liegen, denn wegen der Stetigkeit von γ ist $\gamma^{-1}(U)$ eine offene Menge, enthält also zu jedem ihrer Punkte auch eine offene Umgebung. s könnte aber auch nicht in V liegen, denn auch $\gamma^{-1}(V)$ ist offen, und für alle $0 \le t < s$ liegt t in $\gamma^{-1}(U)$, also, da $U \cap V = \emptyset$, nicht in $\gamma^{-1}(V)$. Das ist ein Widerspruch, denn $X \subseteq U \cup V$, so daß $\gamma(s)$ in einer der beiden Mengen liegen muß.

Somit ist $s = 1$ und $y = \gamma(1) \in U$, denn läge $\gamma(1)$ in V, gäbe es auch eine Umgebung der Eins, so daß $\gamma(t)$ für alle t aus dieser Umgebung in V läge. Da y ein beliebiger Punkt aus X war, liegt ganz X in U und ist daher zusammenhängend. ■

Damit folgt beispielsweise, daß $\mathbb{R}^n$ für jedes n sowohl wegzusammenhängend als auch zusammenhängend ist, denn natürlich ist $\mathbb{R}^n$ kon-

vex: Wir können zwei beliebige Punkte aus $\mathbb{R}^n$ stets durch eine Strecke miteinander verbinden. Damit folgt beispielsweise

Lemma: Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sowohl offen als auch abgeschlossen, so ist entweder $X = \mathbb{R}^n$ oder $X = \emptyset$.

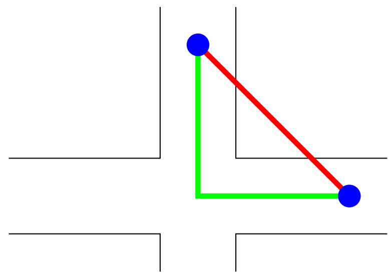
Beweis: Ist X sowohl offen als auch abgeschlossen, ist auch $\mathbb{R}^n \setminus X$ offen und hat natürlich leeren Durchschnitt mit X. Die Vereinigung dieser beiden offenen Mengen ist ganz $\mathbb{R}^n$, und da dies eine zusammenhängende Menge ist, liegt entweder ganz $\mathbb{R}^n$ in X, d.h. $X = \mathbb{R}^n$, oder aber ganz $\mathbb{R}^n$ liegt in $\mathbb{R}^n \setminus X$, was nur für $X = \emptyset$ möglich ist. ■

Die beiden Aussagen des vorigen Lemmas lassen sich nicht umkehren, es gibt also wegzusammenhängende Mengen, die nicht konvex sind, und zusammenhängende, aber nicht wegzusammenhängende Mengen.

Als erstes Beispiel betrachten wir die Menge

$$X = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| |x| \le 1 \text{ oder } |y| \le 1\big\} .$$

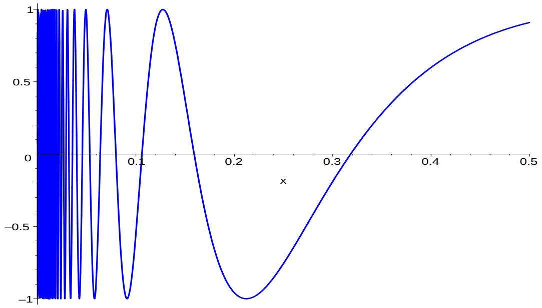
Sie ist nicht konvex, denn die Verbindungsstrecke der beiden Punkte $(0,4)$ und $(4,0)$ aus X enthält beispielsweise den Punkt $(2,2)$, der nicht in X liegt. Sie ist aber wegzusammenhängend, denn für jeden Punkt $(x,y) \in X$ liegt dessen Verbindungsstrecke zum Nullpunkt in X, und für zwei Punkte aus X können wir die beiden Verbindungsstrecken zum Nullpunkt aneinandersetzen zu einer Verbindungskurve.



Beispiele zusammenhängender, aber nicht wegzusammenhängender Mengen sind schwerer zu finden; am populärsten ist die Menge

$$X = \big\{(x, \sin\tfrac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x > 0\big\} \cup \big\{(0,y) \bigm| |y| \le 1\big\}$$

bestehend aus einer Sinuslinie mit für $x \to 0$ immer kleiner werdendem Abstand zwischen aufeinanderfolgenden Bergen und Tälern und dem Intervall auf der y-Achse, dem sich diese Sinuslinie immer mehr annähert.



Diese Menge ist nicht wegzusammenhängend; beispielsweise lassen sich die beiden Punkte $(\frac{1}{\pi}, 0)$ und $(0, 1)$ aus X nicht durch eine Kurve miteinander verbinden: Gäbe es nämlich eine Kurve γ mit $\gamma(0) = (\frac{1}{\pi}, 0)$ und $\gamma(1) = (0, 1)$, so könnten wir die Menge aller $u \in [0,\ 1]$ betrachten, für die $\gamma(t)$ im Intervall $0 \le t < u$ überall positive x-Koordinate hat; ihr Supremum sei s. Wegen $\gamma(1) = (0, 1)$ wäre $s < 1$; außerdem müßte die x-Koordinate von $\gamma(s)$ verschwinden, denn wäre sie positiv, könnte es nicht in jeder beliebig kleinen Umgebung von $\gamma(s)$ Punkte mit x-Koordinate Null geben. Da $\sin\frac{1}{x}$ in jedem Intervall $(0, \varepsilon)$ alle Werte zwischen -1 und 1 annimmt, müßte $\gamma(s)$ wegen der Stetigkeit von γ in jeder beliebig kleinen Umgebung Punkte mit allen y-Koordinaten zwischen -1 und 1 haben, was natürlich nicht möglich ist. Somit ist X nicht wegzusammenhängend.

Die beiden Teilmengen

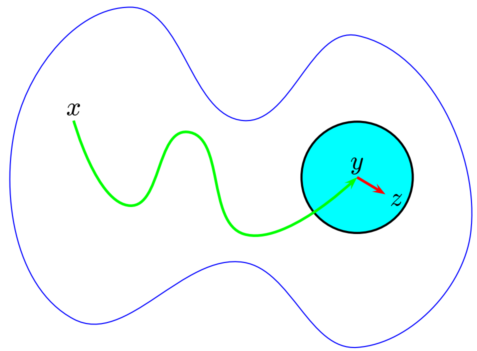
$$X_1 = \left\{(x, \sin\tfrac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x > 0\right\} \quad\text{und}\quad X_2 = \left\{(0, y) \;\middle|\; |y| \le 1\right\}$$

sind natürlich wegzusammenhängend und damit erst recht zusammenhängend. Wenn es zwei offene Mengen U, V mit leerem Durchschnitt gäbe, so daß $X \subseteq U \cup V$ weder in U noch in V liegt, müßte daher X_1 in U und X_2 in V liegen oder umgekehrt. Das ist aber nicht möglich, denn in jeder offenen Menge, die X_2 enthält, gibt es auch Punkte aus X_1. Daher ist X zusammenhängend.

Der große Aufwand, den wir für dieses Beispiel treiben mußten, legt die Vermutung nahe, daß zusammenhängende Mengen in vielen Fällen auch wegzusammenhängend sind. In der Tat gilt etwa

Lemma: Eine offene Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist.

Beweis: Wir wissen bereits, daß *jede* wegzusammenhängende Menge zusammenhängend ist; zu zeigen bleibt, daß jede offene zusammenhängende Menge X auch wegzusammenhängend ist. Für die leere Menge gibt es nichts zu beweisen; sei also $X \neq \emptyset$. Wir wählen einen festen Punkt $x \in X$ und betrachten die Menge U aller $y \in X$, die durch eine Kurve mit x verbunden werden können, sowie die Menge V aller jener $y \in X$, für die das nicht der Fall ist. Beides sind offene Mengen: Wegen der Offenheit von X gibt es nämlich zu jedem $y \in X$ ein $\varepsilon > 0$, so daß auch alle $z \in \mathbb{R}^n$ mit $\|z - y\| < \varepsilon$ in X liegen. Wenn wir dabei die EUKLIDische Norm verwenden, liegen diese Punkte z in einer n-dimensionalen Kugel um y mit Radius ε und lassen sich daher alle durch eine Strecke, die ganz innerhalb der Kugel und damit auch innerhalb von X liegt, mit dem Mittelpunkt y verbinden.



Falls sich der Mittelpunkt durch eine Kurve mit x verbinden läßt, können wir diese Kurve daher um eine Strecke verlängern, um auch jeden Punkt z aus der Kugel mit x zu verbinden, so daß die gesamte Kugel in U liegt. Falls es umgekehrt innerhalb von X keine Verbindungskurve von x nach y gibt, kann es auch für kein z aus der Kugel eine solche

Kurve geben, denn sonst könnten wir diese um die Verbindungsstrecke von z nach y verlängern zu einer Verbindungskurve zwischen x und y.

Damit sind U und V offene Mengen; ihr Durchschnitt ist leer und ihre Vereinigung gleich X. Da wir X als zusammenhängend vorausgesetzt haben, muß ganz X in einer der beiden Mengen liegen, und da x in U liegt, ist das die Menge U. Dies zeigt, daß sich jeder Punkt $y \in X$ durch eine ganz in X verlaufende Kurve mit x verbinden läßt; X ist also wegzusammenhängend. ■

Im Eindimensionalen ist die Situation noch einfacher; hier erhalten wir bei allen drei oben definierten Begriffen einfach die Intervalle, zu denen wir, wie üblich, auch die unbeschränkten Intervalle und die leere Menge rechnen:

Lemma: Für eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$ sind die folgenden vier Aussagen äquivalent:
a) X ist ein Intervall.
b) X ist konvex.
c) X ist wegzusammenhängend.
d) X ist zusammenhängend.

Beweis: Um die Äquivalenz dieser vier Aussagen zu zeigen, müssen wir nicht alle $4 \cdot 3 = 12$ Implikationen einzeln nachweisen; es reicht, wenn wir in einem sogenannten *Ringschluß* die Folgerungen

$$a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow a)$$

zeigen. Die ersten drei unter diesen sind offensichtlich *bzw.* wurden oben schon allgemein gezeigt; wirklich beweisen müssen wir daher nur, daß jede zusammenhängende Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Da wir die leere Menge *per definitionem* als Intervall betrachten, können wir dazu annehmen, daß X nicht leer ist.

Falls X nach oben beschränkt ist, hat X ein Supremum $b \in \mathbb{R}$; wir wollen uns als erstes überlegen, daß X dann für jedes $z \in X$ das Intervall $[z, b)$ enthält: Gäbe es nämlich ein $c \in [z, b)$, das nicht in X läge, so läge X in der Vereinigung der beiden offenen Mengen $U = \{x \in \mathbb{R} \mid x < c\}$ und $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > c\}$, aber weder in U noch in V. Entsprechend folgt, daß X, sofern es unbeschränkt ist, zu jedem $z \in X$ auch alle reellen Zahlen $x \geq z$ enthalten muß, denn läge $x > z$ nicht in X, könnten wir wie eben argumentieren.

Dasselbe Argument zeigt auch, daß X, falls es nach unten beschränkt ist, für jedes $z \in X$ das Intervall $(a, z]$ enthalten muß, wobei a das Infimum von X bezeichnet; falls X nicht nach unten beschränkt ist, muß es entsprechend zu jedem $z \in X$ auch alle reellen Zahlen $x \leq z$ enthalten.

Ist also X eine beschränkte zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit Infimum a und Supremum b, so enthält X das offene Intervall (a, b). Da X keine Punkte $z < a$ oder $z > b$ enthalten kann, können dazu höchstens noch einer oder beide der Punkte a, b kommen; X ist also eines der vier Intervalle (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ oder $(a, b]$.

Falls X nur nach unten beschränkt ist mit Infimum a, enthält X auf jeden Fall alle reellen Zahlen $x > a$, zusätzlich eventuell nach den Punkt a. Entsprechendes gilt für eine nur nach oben beschränkte Menge.

Bleibt noch der Fall, daß X weder nach oben noch nach unten beschränkt ist; dann ist $X = \mathbb{R}$, was wir ebenfalls als Intervall betrachten. ■

Die für uns wichtigste Anwendung zusammenhängender Mengen ist die folgende Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes:

Satz: Ist $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $X \subseteq D$ zusammenhängend, so ist auch $f(X)$ zusammenhängend.

Beweis: U und V seien zwei offene Teilmengen von $\mathbb{R}^m$ mit leerem Durchschnitt, und $f(X)$ liege in der Vereinigung $U \cup V$. Wegen der Stetigkeit von f sind die Urbilder $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$; ihr Durchschnitt ist leer, denn kein $x \in D$ kann ein Bild haben, das sowohl in U als auch in V liegt. Somit muß X ganz in einer der beiden Mengen $f^{-1}(U)$ oder $f^{-1}(V)$ liegen, also $f(X)$ in U oder in V. ■

Speziell für $m = 1$ folgt

Korollar: Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $X \subseteq D$ zusammenhängend, so ist $f(X)$ ein Intervall, enthält also zu je zwei Werten a, b auch alle Zahlen, die zwischen den beiden liegen. ■