WOLFGANG K. SEILER — A5, C201
Tel. 2515

1. September 2010

Modulklausur Analysis II

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •
• • • Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge • • •
• • • bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst • • •
• • • auf das, womit sie schnell Punkte holen können! • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von Punkten aus $\mathbb{R}^n$ und y_k sei die Maximumsnorm von x_k. Falls die Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so konvergiert auch die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Lösung: *Falsch:* Ist etwa $x_k = (1, \dots, 1)$ für alle geraden k und $x_k = (-1, \dots, -1)$ für alle ungeraden k, so ist $y_k = 1$ für alle k, und diese konstante Folge konvergiert gegen eins. Die Folge der x_k dagegen springt ständig zwischen zwei Punkten hin und her und konvergiert daher nicht.

2) *Richtig oder falsch:* Die HESSE-Matrix einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann überall gleich der Nullmatrix, wenn f eine lineare Funktion ist.

Lösung: *Richtig,* denn wenn alle zweiten partiellen Ableitungen verschwinden, sind die ersten partiellen Ableitungen konstant, die Funktion also linear. Umgekehrt hat eine lineare Funktion konstante erste partielle Ableitungen, also verschwinden die zweiten.

3) *Richtig oder falsch:* Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit kompaktem Träger, so gibt es Punkte $(x_m, y_m) \in \mathbb{R}^2$ sowie $(x_M, y_M) \in \mathbb{R}^2$, in denen $f(x, y)$ ihren minimalen *bzw.* maximalen Wert auf $\mathbb{R}^2$ annimmt.

Lösung: *Richtig:* Ist A der Träger von f, so nimmt f als stetige Funktion auf dieser kompakten Menge sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum an. Außerhalb von A verschwindet f; wegen der Stetigkeit von f auf ganz $\mathbb{R}^2$ kann der Maximalwert auf A nicht kleiner und der Minimalwert nicht größer als Null sein. Somit sind dies gleichzeitig der Maximal- und Minimalwert auf $\mathbb{R}^2$.

4) *Richtig oder falsch:* Die Gleichung $x = e^{\sin x - 1}$ hat genau eine reelle Lösung.

Lösung: *Richtig,* denn $f(x) = e^{\sin x - 1}$ hat die Ableitung $f'(x) = \cos x\, e^{\sin x - 1}$; dabei ist $|\cos x| \le 1$ und $e^{-2} \le e^{\sin x - 1} \le e^0 = 1$, der Betrag der Ableitung ist also überall höchstens eins. Tatsächlich kann er nie eins werden, da $|\cos x|$ nur für ganzzahlige Vielfache von π den Wert eins annimmt, und dort verschwindet der Sinus, so daß der zweite Faktor $e^{-1} < 1$ ist. Da $|f'(x)|$ alle seine Werte bereits auf dem kompakten Intervall $[0, 2\pi]$ annimmt, hat er also ein Maximum, das echt kleiner als eins ist, und nach dem BANACHschen Fixpunktsatz konvergiert für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ die Folge der x_k mit $x_k = f(x_{k-1})$ gegen die eindeutige Lösung der Gleichung $f(x) = x$.

5) *Richtig oder falsch:* Für jede Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger existiert $\int_{\mathbb{R}^n} f$ und hat einen endlichen Wert.

Lösung: *Richtig;* denn der kompakte Träger ist beschränkt, also Teilmenge eines Quaders; nach Definition ist $\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_Q f$; letzteres existiert und hat einen endlichen Wert wegen der Stetigkeit von f.

6) Richtig oder falsch: Ist $Z \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$, so ist $Z^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x \in Z \text{ oder } y \in Z\}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^{2n}$.

Lösung: *Richtig:* Z^* ist die Vereinigung von $Z_1 = Z \times \mathbb{R}^n$ und $Z_2 = \mathbb{R}^n \times Z$. Da das kartesische Produkt einer Nullmenge mit einer beliebigen Menge wieder eine Nullmenge ist und auch die Vereinigung zweier Nullmengen, ist Z^* eine Nullmenge.

Aufgabe 1: (*8 Punkte*)

a) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom vom Grad sechs um den Punkt $(0,0)$ für die Funktion $f(x,y) = 1 + \sin(x^2+y^2)\cos(x^2-y^2)$!

Lösung: Da wir um den Nullpunkt entwickeln, können wir direkt mit den Variablen x und y arbeiten. Die TAYLOR-Reihen

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \quad \text{und} \quad \cos w = 1 - \frac{w^2}{2!} + \frac{w^4}{4!} - \frac{w^6}{6!} \cdots$$

sind (hoffentlich) wohlbekannt und zeigen, daß

$$\sin(x^2+y^2) = (x^2+y^2) - \frac{(x^2+y^2)^3}{6} + \cdots \quad \text{und} \quad \cos(x^2-y^2) = 1 - \frac{(x^2-y^2)^2}{2} + \cdots$$

ist. Man beachte, daß diese Reihen außer den dastehenden keine weiteren Terme vom Grad höchstens höchstens sechs in x, y enthalten.

Das gesuchte TAYLOR-Polynom besteht somit aus allen Termen vom Grad höchstens sechs von $1 + \left((x^2+y^2) - \frac{(x^2+y^2)^3}{6}\right)\left(1 - \frac{(x^2-y^2)^2}{2}\right)$, ist also

$$\begin{aligned}
&1 + (x^2+y^2) - \frac{(x^2+y^2)^3}{6} - \frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)^2}{2} \\
&= 1 + x^2 + y^2 - \frac{x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6}{6} - \frac{x^6 - x^4y^2 - x^2y^4 + y^6}{2} \\
&= 1 + x^2 + y^2 - \frac{2x^6}{3} - \frac{2y^6}{3}.
\end{aligned}$$

b) Nimmt f auf $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 10\}$ ein (absolutes) Maximum an?

Lösung: f ist eine stetige Funktion und die abgeschlossene Kreisscheibe D ist wegen ihrer Beschränktheit auch kompakt; da eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum annimmt, nimmt f auf D sein Maximum an.

Aufgabe 2: (*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie jene Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in denen die Funktion $f(x,y) = e^{x^2+\cos y}$ (relative) Maxima, (relative) Minima und Sattelpunkte hat!

Lösung: f ist beliebig oft differenzierbar, also können wir mit Gradient und HESSE-Matrix arbeiten. Die partiellen Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x\,e^{x^2+\cos y} \\ f_y(x,y) &= -\sin y\,e^{x^2+\cos y} \\ f_{xx}(x,y) &= 2e^{x^2+\cos y} + (2x)^2 e^{x^2+\cos y} = (4x^2+2)e^{x^2+\cos y} \ . \\ f_{xy}(x,y) = f_{xy}(x,y) &= -2x\sin y\,e^{x^2+\cos y} \\ f_{yy}(x,y) &= -\cos y\,e^{x^2+\cos y} + \sin^2 y\,e^{x^2+\cos y} \end{aligned}$$

Da die Exponentialfunktion keine Nullstellen hat, ist das Verschwinden des Gradienten gleichbedeutend mit den beiden Gleichungen $2x = 0$ und $-\sin y = 0$, also muß x verschwinden und y ein ganzzahliges Vielfaches von π sein. Für $y = k\pi$ ist $\sin y = 0$ und $\cos y = (-1)^k$; die HESSE-Matrix an der Stelle $(0, k\pi)$ ist daher

$$H_f(0,k\pi) = \begin{pmatrix} 2e^{\pm 1} & 0 \\ 0 & -(-1)^k e^{\pm 1} \end{pmatrix} .$$

Dies ist eine Diagonalmatrix; sie ist genau dann positiv *bzw.* negativ definit, wenn beide Diagonaleinträge positiv *bzw.* negativ sind. $2e^{\pm 1}$ ist positiv, $-(-1)^k e^{\pm 1}$ ist positiv für ungerade k und negativ für gerade k. Somit hat f im Punkt $(0, k\pi)$ für ungerade k ein Minimum, für gerade k einen Sattelpunkt.

b) Gibt es ein absolutes Maximum *bzw.* Minimum?

Lösung: Ein absolutes Maximum kann es nicht geben, da der Exponent $x^2 + \cos y$ unbegrenzt wächst. Der Exponent hat aber ein absolutes Minimum, denn x^2 ist stets größer oder gleich Null und $x^2 = 0$ genau dann, wenn auch $x = 0$ ist; entsprechend ist $\cos y \geq -1$ mit Gleichheit genau dann, wenn y ein ungeradzahliges Vielfaches von π ist. Wegen der Monotonie der Exponentialfunktion nimmt auch f in diesen Punkten sein absolutes Minimum e^{-1} an. (Durch Ausnützen der Monotonie der Exponentialfunktion hätte man auch in *a)* die Rechung etwas vereinfachen können.)

c) Ein Produkt wird aus drei Resourcen hergestellt; mit x Einheiten der ersten, y der zweiten und z der dritten lassen sich $f(x,y,z) = 60x^{1/6}y^{1/3}z^{1/2}$ Einheiten herstellen. Eine Einheit der ersten Resource kostet 1000 Euro, eine der zweiten 2000 Euro, und bei der dritten sind es sogar 3000 Euro. Wie viele Einheiten lassen sich mit einem Kapitaleinsatz von 120 000 Euro maximal herstellen?

Lösung: Da f ansteigt, sobald eine der drei Variablen größer wird, muß im Maximum, so eines existiert, $1000x+2000y+3000z = 120\,000$ sein, also $g(x,y,z) = x+2y+3z-120 = 0$. Außerdem kann dort keine der drei Variablen verschwinden, denn sonst wäre $f(x,y,z) = 0$. Im Maximum existieren also die Gradienten

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 10x^{-5/6}y^{1/3}z^{1/2} \\ 20x^{1/6}y^{-2/3}z^{1/2} \\ 30x^{1/6}y^{1/3}z^{-1/2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \operatorname{grad} g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ,$$

und sie müssen proportional sein. Wenn wir im Gleichungssystem

$$10x^{-5/6}y^{1/3}z^{1/2} = \lambda, \quad 20x^{1/6}y^{-2/3}z^{1/2} = 2\lambda, \quad 30x^{1/6}y^{1/3}z^{-1/2} = 3\lambda$$

idie erste Gleichung durch zehn, die zweite Gleichung durch zwanzig und die dritte durch dreißig teilen, steht rechts überall $\lambda/10$; da uns der Wert von λ nicht interessiert, können wir einfach schreiben $x^{-5/6}y^{1/3}z^{1/2} = x^{1/6}y^{-2/3}z^{1/2} = x^{1/6}y^{1/3}z^{-1/2}$. Multiplikation mit $x^{5/6}y^{2/3}z^{1/2}$ macht daraus das übersichtlichere System $yz = xz = xy$; da keine der drei Variablen verschwindet, können wir um das erste Gleichheitszeichen durch z dividieren und um das zweite durch x; wir erhalten das System $x = y = z$. Einsetzen in die Nebenbedingung zeigt, daß $g(x, x, x) = x + 2x + 3x = 6x = 120$ sein muß, also $x = y = z = 20$. Somit lassen sich $f(20, 20, 20) = 60 \cdot 20^{1/6} \cdot 20^{1/3} \cdot 20^{1/2} = 60 \cdot 20^1 = 1200$ Einheiten produzieren.

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Punkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, in deren Umgebung sich die Gleichung

$$x^3 + y + \cos(y)^2 = 0$$

nicht eindeutig auflösen läßt zu einer expliziten Gleichung der Form $y = \varphi(x)$!

Lösung: Die Gleichung $f(x, y) = x^3 + y + \cos(y)^2 = 0$ kann in einem Punkt (x_0, y_0) mit $f(x_0, y_0) = 0$ genau dann *nicht* eindeutig nach y aufgelöst werden, wenn $f_y(x_0, y_0)$ verschwindet, wenn also $1 - 2 \sin y_0 \cos y_0 = 0$ ist. Nach der Formelsammlung am Ende der Klausur ist das gleich $1 - \sin 2y_0$, was genau dann verschwindet, wenn $\sin 2y_0 = 1$ ist, also $2y_0 = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ mit einer ganzen Zahl k. Somit ist $y_0 = \frac{1}{4}\pi + k\pi$. Setzen wir dies ein in $f(x_0, y_0) = 0$, erhalten wir die Gleichung

$$x_0^3 + y_0 + \cos^2 y_0 = x_0^3 + \frac{\pi}{4} + k\pi + \frac{1}{2} = 0\,,$$

denn $\cos(k + \frac{1}{4})\pi = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Somit muß $x_0 = -\sqrt[3]{\frac{\pi}{4} + 2k\pi + \frac{1}{2}}$ sein; f kann also genau in den Punkten $\left(-\sqrt[3]{\frac{\pi}{4} + 2k\pi + \frac{1}{2}},\ (2k + \frac{1}{4})\pi\right)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ nicht nach y aufgelöst werden.

b) Was ist $\varphi'(x_0)$ für einen Punkt (x_0, y_0), der nicht zu diesen Ausnahmen zählt?

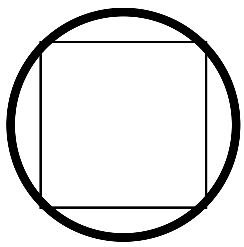
Lösung: Dort ist $\varphi'(x_0) = -\dfrac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = -\dfrac{3x_0^2}{1 - \sin 2y_0}$.

Aufgabe 4: *(10 Punkte)*

Die Menge A bestehe aus allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die $\max\{|x|, |y|\} > 1$ ist und $x^2 + y^2 \leq 2$.

a) Skizzieren Sie die Menge A!

Lösung:
A ist die abgeschlossene Kreisscheibe mit Radius $\sqrt{2}$ um den Nullpunkt minus dem abgeschlossenen Quadrat mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$. In der Zeichnung gehört also die Kreislinie mit Ausnahme der vier Ecken des Quadrats noch zu A, die Kanten des Quadrats aber nicht.



b) Geben Sie möglichst gute untere und obere Schranken an für die Maximumsnorm der Elemente von A!

Lösung: Die Maximumsnorm eines Punkts aus A muß nach Definition größer als eins sein; da die EUKLIDische Norm $\sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2}$ sein muß und das kleinste achsenparallele Quadrat, das diesen Kreis enthält, die Ecken $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ hat, ist sie kleiner oder gleich $\sqrt{2}$, d.h. für $z \in A$ ist $1 < \|z\|_\infty \leq \sqrt{2}$.

c) Entscheiden Sie für alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$, ob es sich dabei um innere, äußere oder Randpunkte von A handelt!

Lösung: Auf Grund der gerade bewiesenen Abschätzung für die Norm ist klar, daß alle Punkte (x, y) mit $|x| \geq 2$ oder $|y| \geq 2$ äußer Punkte sind, ebenso der Punkt $(0, 0)$. Bleiben noch die Punkte $(\pm 1, \pm 1)$. Diese liegen zwar nicht in A, sind aber Randpunkte, da es in jeder Umgebung sowohl Punkte gibt, die nicht in A liegen, z.B. den Punkt $(\pm 1, \pm 1)$ selbst, als auch Punkte aus A wie z.B. für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ der Punkt $\big(\pm(1 + \varepsilon), \pm(1 - 2\varepsilon)\big)$, denn $(1 + \varepsilon)^2 + (1 - 2\varepsilon^2) = 2 - 2\varepsilon + 4\varepsilon^2$ ist kleiner als zwei, falls $\varepsilon > 2\varepsilon^2$, d.h. $\varepsilon < \frac{1}{2}$ ist.

d) B sei der Abschluß von A. Entscheiden Sie für jede der Eigenschaften offen, abgeschlossen, beschränkt, kompakt, wegzusammenhängend, zusammenhängend, ob sie für A oder B zutrifft!

Lösung: Der Abschluß von A ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält; insbesondere müssen alle Randpunkte von A dort liegen, d.h. die Kanten des Quadrats mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$. Somit ist $B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| \max\{|x|, |y|\} \geq 1 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 2\big\}$.

Da B echt größer als A ist, kann A nicht abgeschlossen sein; B als Abschluß ist nach Definition abgeschlossen.

Weder A noch B sind offen; beispielsweise ist der Punkt $(\sqrt{2}, 0)$, der sowohl in A als auch in B liegt, kein innerer Punkt, sondern Randpunkt.

Sowohl A als auch B liegen in der Kreisscheibe mit Radius $\sqrt{2}$ um den Nullpunkt, sind also beschränkt. B als abgeschlossene Menge ist damit auch kompakt, A aber nicht, da jede kompakte Menge abgeschlossen ist.

A ist nicht zusammenhängend und damit erst recht nicht wegzusammenhängend, denn A liegt in beispielsweise in der Vereinigung der beiden offenen Mengen

$$U = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x > y\big\} \quad \text{und} \quad V = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x < y\big\},$$

denn A enthält keinen Punkt der Form (x, x). Trotzdem ist A natürlich in keiner der beiden Mengen ganz enthalten: $(0, \sqrt{2}) \notin U$ und $(\sqrt{2}, 0) \notin V$.

B dagegen ist wegzusammenhängend und damit erst recht zusammenhängend, denn die Kreislinie um $(0, 0)$ mit Radius $\sqrt{2}$ liegt in B und ist wegzusammenhängend; außerdem läßt sich jeder Punkt von B durch eine ganz in B liegende waagrechte oder senkrechte Strecke mit einem Punkt auf dieser Kreislinie verbinden. Durch Kombination von Strecken und einem Teilbogen der Kreislinie lassen sich also zwei beliebige Punkte aus B miteinander verbinden.

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

Eine Reihe von Datenpaaren (x_i, y_i) für $i = 1, \ldots, 100$ zeigt ein ungefähres zyklisches Verhalten gemäß einer Funktion der Form $y = a \cos x + b \sin x$. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für jene Parameter a und b auf, für die die idealerweise geltenden Gleichungen $y_i = a \cos x_i + b \sin x_i$ im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate am wenigsten falsch sind!

Lösung: Falls der Zusammenhang perfekt wäre, würden die gesuchten Parameter a und b den hundert linearen Gleichungen $\cos x_i \cdot a + \sin x_i \cdot b = y_i$ genügen; in Matrixform ist dies das lineare Gleichungssystem

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = y \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} \cos x_1 & \sin x_1 \\ \vdots & \vdots \\ \cos x_{100} & \sin x_{100} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{100} \end{pmatrix}.$$

Dieses LGS für a und b wird praktisch immer unlösbar sein; die im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate beste Schätzung erhält man, indem man mit der transponierten Matrix von A multipliziert: $(A^TA)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^Ty$. Ausgeschrieben wird das zu

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{100} \cos^2 x_i & \sum\limits_{i=1}^{100} \sin x_i \cos x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{100} \sin x_i \cos x_i & \sum\limits_{i=1}^{100} \sin^2 x_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{100} y_i \cos x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{100} y_i \sin x_i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6: *(8 Punkte)*

a) Q sei das Quadrat mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$ und die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x,y) = (1-x^2)(1-y^2)$. Berechnen Sie $\int_Q f$!

Lösung:

$$\begin{aligned} \int_Q f &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} (1-x^2)(1-y^2)\,dx \right) dy = \int_{-1}^{1} \left((1-y^2) \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx \right) dy \\ &= \int_{-1}^{1} \left((1-y^2) \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^{1} \right) dy = \int_{-1}^{1} \left((1-y^2) \left(2 - \frac{2}{3} \right) \right) dy \\ &= \frac{4}{3} \int_{-1}^{1} (1-y^2)\,dy = \left(\frac{4}{3} \right)^2 = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}, \end{aligned}$$

denn das Integral über $1-y^2$ hat natürlich den gleichen Wert wie das über $1-x^2$.

b) Die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stimme auf dem Quadrat Q mit f überein; für $(x,y) \neq Q$ sei $g(x,y) = 0$. Bestimmen Sie die Träger von f und g !

Lösung: f verschwindet genau dann, wenn $x = \pm 1$ oder $y = \pm 1$ ist, d.h. also auf vier Geraden im $\mathbb{R}^2$. Der Abschluß von $\mathbb{R}^2$ minus dieser Geraden ist der gesamte $\mathbb{R}^2$, denn jeder Geradenpunkt ist Randpunkt des Komplements. Der Träger von f ist also der gesamte $\mathbb{R}^2$. g verschwindet im Quadrat Q nur auf dessen Rand, außerhalb von Q aber überall. Der Träger von g ist somit der Abschluß des Quadrats ohne Rand, also das gesamte Qzadrat Q.

c) Ist f oder g eine Funktion mit kompaktem Träger?

Lösung: Der Träger von f ist $\mathbb{R}^2$, also nicht kompakt; somit ist f *keine* Funktion mit kompaktem Träger. Der Träger Q von g ist kompakt; zur Definition einer Funktion mit kompaktem Träger gehört aber noch, daß sie auch stetig sein muß. Da f und g auf dem Rand von Q verschwinden, ist dies der Fall, denn im Innern von Q ist g als Polynomfunktion stetig, im Äußern als konstante Funktion, und für einen Randpunkt ist der Limes der Funktionswerte stets Null, egal ob man von Innen oder von Außen kommt.

d) Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}^2} g$!

Lösung: Da der Träger von g gleich Q ist und damit insbesondere ganz in Q liegt, ist

$$\int_{\mathbb{R}^2} g = \int_Q g = \int_Q f = \frac{16}{9},$$

denn auf Q stimmen f und g ja überein.