WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

1. September 2010

Modulklausur Analysis II

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •
• • • Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge • • •
• • • bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst • • •
• • • auf das, womit sie schnell Punkte holen können! • • •

Fragen: *(je zwei Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von Punkten aus $\mathbb{R}^n$ und y_k sei die Maximumsnorm von x_k. Falls die Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so konvergiert auch die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

2) Richtig oder falsch: Die HESSE-Matrix einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ist genau dann überall gleich der Nullmatrix, wenn f eine lineare Funktion ist.

3) Richtig oder falsch: Ist $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ eine Funktion mit kompaktem Träger, so gibt es Punkte $(x_m,y_m)\in\mathbb{R}^2$ sowie $(x_M,y_M)\in\mathbb{R}^2$, in denen $f(x,y)$ ihren minimalen *bzw.* maximalen Wert auf $\mathbb{R}^2$ annimmt.

4) Richtig oder falsch: Die Gleichung $x=e^{\sin x-1}$ hat genau eine reelle Lösung.

5) Richtig oder falsch: Für jede Funktion $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger existiert $\int_{\mathbb{R}^n} f$ und hat einen endlichen Wert.

6) Richtig oder falsch: Ist $Z\subset\mathbb{R}^n$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$, so ist $Z^*=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \bigm| x\in Z \text{ oder } y\in Z\big\}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^{2n}$.

Aufgabe 1: (*8 Punkte)*

a) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom vom Grad sechs um den Punkt $(0,0)$ für die Funktion $f(x,y)=1+\sin(x^2+y^2)\cos(x^2-y^2)$!

b) Nimmt f auf $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 10\}$ ein (absolutes) Maximum an?

Aufgabe 2: (*10 Punkte)*

a) Bestimmen Sie jene Punkte $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, in denen die Funktion $f(x,y)=e^{x^2+\cos y}$ (relative) Maxima, (relative) Minima und Sattelpunkte hat!

b) Gibt es ein absolutes Maximum *bzw.* Minimum?

c) Ein Produkt wird aus drei Resourcen hergestellt; mit x Einheiten der ersten, y der zweiten und z der dritten lassen sich $f(x,y,z)=60x^{1/6}y^{1/3}z^{1/2}$ Einheiten herstellen. Eine Einheit der ersten Resource kostet 1000 Euro, eine der zweiten 2000 Euro, und bei der dritten sind es sogar 3000 Euro. Wie viele Einheiten lassen sich mit einem Kapitaleinsatz von 120 000 Euro maximal herstellen?

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Punkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, in deren Umgebung sich die Gleichung

$$x^3 + y + \cos(y)^2 = 0$$

nicht eindeutig auflösen läßt zu einer expliziten Gleichung der Form $y = \varphi(x)$!

b) Was ist $\varphi'(x_0)$ für einen Punkt (x_0, y_0), der nicht zu diesen Ausnahmen zählt?

Aufgabe 4: *(10 Punkte)*

Die Menge A bestehe aus allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die $\max\{|x|, |y|\} > 1$ ist und $x^2 + y^2 \leq 2$.

a) Skizzieren Sie die Menge A !

b) Geben Sie möglichst gute untere und obere Schranken an für die Maximumsnorm der Elemente von A !

c) Entscheiden Sie für alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$, ob es sich dabei um innere, äußere oder Randpunkte von A handelt!

d) B sei der Abschluß von A. Entscheiden Sie für jede der Eigenschaften offen, abgeschlossen, beschränkt, kompakt, wegzusammenhängend, zusammenhängend, ob sie für A oder B zutrifft!

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

Eine Reihe von Datenpaaren (x_i, y_i) für $i = 1, \ldots, 100$ zeigt ein ungefähres zyklisches Verhalten gemäß einer Funktion der Form $y = a\cos x + b\sin x$. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für jene Parameter a und b auf, für die die idealerweise geltenden Gleichungen $y_i = a\cos x_i + b\sin x_i$ im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate am wenigsten falsch sind!

Aufgabe 6: *(8 Punkte)*

a) Q sei das Quadrat mit Ecken $(\pm1, \pm1)$ und die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x, y) = (1 - x^2)(1 - y^2)$. Berechnen Sie $\int_Q f$!

b) Die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stimme auf dem Quadrat Q mit f überein; für $(x, y) \neq Q$ sei $g(x, y) = 0$. Bestimmen Sie die Träger von f und g !

c) Ist f oder g eine Funktion mit kompaktem Träger?

d) Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}^2} g$!

Formelsammlung

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 1. September 2010, um 12^{00} Uhr