Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

12. Juni 2010

Modulklausur Analysis II

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •
• • • Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge • • •
• • • bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst • • •
• • • auf das, womit sie schnell Punkte holen können! • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge von Punkten aus $\mathbb{R}^n$, so konvergiert für jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ auch die Folge $\big(\|x_k\|\big)_{k\in\mathbb{N}}$.

Lösung: *Richtig,* denn wie wir beim Beweis der Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{R}^n$ gesehen haben, ist jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ insbesondere stetig; konvergiert also $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in R$, so konvergiert die Folge der Normen gegen $\|x\|$.

2) Richtig oder falsch: Die Jacobi-Matrix einer differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann überall gleich der Nullmatrix, wenn f eine konstante Funktion ist.

Lösung: *Richtig,* denn dann verschwinden alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, d.h. f kann von keiner der Variablen x_i abhängen. Umgekehrt verschwinden für eine Konstante alle partiellen Ableitungen, also auch die Jacobi-Matrix.

3) Richtig oder falsch: Ist $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so gibt es Punkte $(x_m, y_m) \in \mathbb{R}^2$ sowie $(x_M, y_M) \in \mathbb{R}^2$, in denen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \varphi(\sin x, \cos y)$ ihr Minimum *bzw.* Maximum auf $\mathbb{R}^2$ annimmt.

Lösung: *Richtig;* Die Punkte $(\sin x, \cos y)$ sind genau die Punkte des Quadrats

$$Q = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| \le 1 \text{ und } |y| \le 1\right\},$$

und auf dieser kompakten Menge nimmt die stetige Funktion φ sowohl ihr Maximum als auch ihr Maximum an; dies ist gleichzeitig das Minimum und das Maximum von f.

4) Richtig oder falsch: Für jeden hinreichend kleinen Startwert x_0 definiert die Rekursion $x_k = \tan 2x_{k-1}$ eine Nullfolge.

Lösung: *Falsch;* sonst gäbe es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ derart, daß $|x_k| < \varepsilon$ wäre. für alle $k \ge N$. Da die Ableitung $2 + \tan^2 2x$ von $\tan 2x$ aber in der Umgebung der Null überall größer oder gleich zwei ist, ist für hinreichend kleine ε stets $|x_{k+1}| > |x_k|$.

5) Richtig oder falsch: Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion aus $K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, so auch $g(x) \underset{\text{def}}{=} \sin f(x)$.

Lösung: *Richtig;* denn als Hintereinanderausführung zweier stetiger Funktionen ist g selbst stetig, und da der Sinus im Nullpunkt verschwindet, liegt der Träger von g im Träger von f.

6) Richtig oder falsch: Ist $Z \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, so auch $Z^* = \left\{nx \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \text{ und } x \in Z\right\}$.

Lösung: *Richtig:* Jede der Mengen $Z_n = \{nx \mid x \in Z\}$ ist Nullmenge als Bild von Z unter der stetig differenzierbaren Abbildung $x \mapsto nx$, und damit ist auch Z^* als Vereinigung der abzählbar vielen Nullmengen Z_n eine Nullmenge.

Aufgabe 1: *(8 Punkte)*

a) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom vom Grad drei um den Punkt $(0,0)$ für die Funktion $f(x,y) = 1 + e^{x-y}\cos(x+y)$!

Lösung: Da wir um den Nullpunkt entwickeln, können wir direkt mit den Variablen x und y arbeiten. Die TAYLOR-Reihen

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots \quad \text{und} \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \cdots$$

sind (hoffentlich) wohlbekannt und zeigen, daß

$$e^{x-y} = 1 + (x-y) + \frac{(x-y)^2}{2} + \frac{(x-y)^3}{6} + \cdots \quad \text{und} \quad \cos(x+y) = 1 - \frac{(x+y)^2}{2} + \cdots$$

ist. Man beachte, daß diese Reihen außer den dastehenden keine weiteren Terme vom Grad höchstens drei in x, y enthalten.

Das gesuchte TAYLOR-Polynom besteht somit aus allen Termen vom Grad höchstens drei von $1 + \left(1 + (x-y) + \frac{(x-y)^2}{2} + \frac{(x-y)^3}{6}\right)\left(1 - \frac{(x+y)^2}{2}\right)$, ist also

$$\begin{aligned} &2 + (x-y) + \frac{(x-y)^2}{2} + \frac{(x-y)^3}{6} - \frac{(x+y)^2}{2} - \frac{(x-y)(x+y)^2}{2} \\ &= 2 + x - y + \frac{(x-y)^2 - (x+y)^2}{2} + \frac{(x-y)^3 - 3(x-y)(x+y)^2}{6} \\ &= 2 + x - y - 2xy - \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - x^2y + xy^2 \,. \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, daß f weder lokale Extrema noch Sattelpunkte hat!

Lösung: Da f differenzierbar ist, muß ∇f in jedem lokalen Extremum und jedem Sattelpunkt verschwinden. Die beiden Komponenten von $\nabla f(x,y)$ sind

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= e^{x-y}\cos(x+y) - e^{x-y}\sin(x+y) = e^{x-y}\big(\cos(x+y) - \sin(x+y)\big) \\ f_y(x,y) &= -e^{x-y}\cos(x+y) - e^{x-y}\sin(x+y) = -e^{x-y}\big(\cos(x+y) + \sin(x+y)\big) \end{aligned} .$$

Da die Exponentialfunktion nirgends verschwindet, ist die Bedingung $\nabla f(x,y) = 0$ daher äquivalent zu $\cos(x+y) - \sin(x+y) = 0$ und $\cos(x+y) + \sin(x+y) = 0$. Addition und Subtraktion dieser beiden Gleichungen führen auf $\cos(x+y) = \sin(x+y) = 0$, und da Sinus und Kosinus keine gemeinsamen Nullstellen haben, ist diese Bedingung nicht erfüllbar.

Aufgabe 2: *(10 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2 - \sin(x+y)$ auf $\mathbb{R}^2$ genau ein relatives Extremum hat und entscheiden Sie, um was es sich dabei handelt!

Lösung: f ist beliebig oft differenzierbar, also können wir mit Gradient und HESSE-Matrix arbeiten. Die partiellen Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x - \cos(x+y) \\ f_y(x,y) &= 2y - \cos(x+y) \\ f_{xx}(x,y) &= 2 + \sin(x+y) \quad . \\ f_{xy}(x,y) = f_{xy}(x,y) &= \sin(x+y) \\ f_{yy}(x,y) &= 2 + \sin(x+y) \end{aligned}$$

Verschwinden des Gradienten bedeutet, daß $2x = \cos(x+y)$ und $2y = \cos(x+y)$ sein muß, also

$$x = y = \frac{\cos(x+y)}{2} \quad \text{oder} \quad 2x = \cos 2x = \cos 2y = 2y\,.$$

Wie wir aus der Vorlesung wissen, gibt es genau ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\cos x_0 = x_0$; damit müssen x und y beide gleich $x_0/2$ sein, es gibt also nur eine Lösung.
Die HESSE-Matrix an dieser Stelle ist

$$H_f\left(\frac{x_0}{2}, \frac{x_0}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2+\sin x_0 & -\sin x_0 \\ -\sin x_0 & 2+\sin x_0 \end{pmatrix}$$

mit Determinante $(2+\sin x_0)^2 - \sin^2 x_0 = 4 + 4\sin x_0$. Diese Determinante kann nicht negativ sein, da der Sinus keine Werte kleiner als -1 annimmt; sie kann auch nicht verschwinden, denn wäre $\sin x_0 = -1$, so wäre $\cos x_0 = 0$, was wegen $\cos 0 = 1$ der Gleichung $\cos x_0 = x_0$ widerspricht. Also ist die Determinante positiv, und da $2 + \sin x_0$ auf jeden Fall positiv ist, haben wir eine positiv definite Matrix. Somit liegt im Punkt $(x_0/2, x_0/2)$ ein Minimum vor; der Funktionswert ist

$$\frac{x_0^2}{4} + \frac{x_0^2}{4} - \sin x_0 = \frac{x_0^2}{2} - \sqrt{1-\cos^2 x_0} = \frac{x_0`2}{2} - \sqrt{1-x_0^2} \approx -0{,}4\,.$$

b) Gibt es ein absolutes Maximum *bzw.* Minimum?

Lösung: Ein absolutes Maximum kann es nicht geben, da x^2 und y^2 beide unbegrenzt wachsen. Ein absolutes Minimum muß es aber geben: $f(x,y)$ kann nie kleiner werden als -1, ist also nach unten beschränkt durch eine Schranke, die zwischen -1 und $f(0,0) = 0$ liegt. Da $f(x,y) > 0$ ist für alle (x,y) mit $x^2 + y^2 > 1$, können nur Funktionswerte $f(x,y)$ mit $x^2 + y^2 \le 1$ kleiner oder gleich Null sein. Auf der so definierten kompakten Menge nimmt die stetige Funktion f aber ihr Minimum an. (Es ist natürlich das in *a)* bestimmte relative Minimum.)

c) Bestimmen Sie das Maximum der Funktion $f(x,y,z) = x^2 + yz$ unter den Nebenbedingungen $x,y,z > 0$ und $4x + 2y + z \le 12$!

Lösung: Da x,y,z positiv sein sollen und f ansteigt, sobald eine der Variablen größer wird, muß im Maximum, so eines existiert $g(x,y,z) = 4x + 2y + z - 12 = 0$ sein und die Gradienten

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 2x \\ z \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \operatorname{grad} g = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

müssen dort proportional sein. Das Gleichungssystem $2x = 4\lambda$, $z = 2\lambda$ und $y = \lambda$ zeigt, daß $x = z = 2y$ ist. Einsetzen in g führt auf $4x + x + x - 12 = 0$ oder $x = z = 2$ und $y = 1$; in Frage kommt also nur dieser Punkt mit $f(2,1,2) = 6$.

NB Tatsächlich liegt hier kein Maximum vor: Löst man die Nebenbedingung z.B. nach z auf, setzt dies in f ein und löst das entsprechende Extremwertproblem in zwei Variablen, so erkennt man, daß $(2, 1, 2)$ ein Sattelpunkt ist; es gibt kein Maximum, da die Funktion zum anderen Rand hin ansteigt, also dem ausgeschlossenen Rand, an dem einzelne Koordinaten verschwinden. Dies ist ein Fehler der Aufgabenstellung; die obige „Lösung“ gab deshalb volle Punktzahl.

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Punkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, in deren Umgebung sich die Gleichung

$$x^4 + 6x^2y - 2y^3 = 0$$

nicht eindeutig auflösen läßt zu einer expliziten Gleichung der Form $y = \varphi(x)$!

Lösung: Die Gleichung $f(x, y) = x^4 + 6x^2y - 2y^3 = 0$ kann in einem Punkt (x_0, y_0) mit $f(x_0, y_0) = 0$ genau dann *nicht* eindeutig nach y aufgelöst werden, wenn $f_y(x_0, y_0)$ verschwindet, wenn also $6x_0^2 - 6y_0^2 = 0$ verschwindet und damit $x_0 = \pm y_0$ ist. Setzen wir dies ein in $f(x_0, y_0) = 0$, erhalten wir die Gleichung

$$y_0^4 + 6y_0^3 - 2y_0^3 = y_0^4 + 4y_0^3 = y_0^3(y_0 + 4) = 0$$

mit den beiden Lösungen $y_0 = 0$ und damit auch $x_0 = 0$ und $y_0 = -4$; in diesem Fall ist $x_0 = \pm 4$. Es gibt also genau drei Punkte, in denen sich f nicht eindeutig auflösen läßt, nämlich $(0, 0)$, $(4, -4)$ und $(-4, -4)$.

b) Was ist $\varphi'(x_0)$ für einen Punkt (x_0, y_0), der nicht zu diesen Ausnahmen zählt?

Lösung: Dort ist $\varphi'(x_0) = -\dfrac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0} = -\dfrac{4x^3 + 12xy}{6x^2 - 6y^2} = -\dfrac{2x(x^2 + 3y)}{3(x^2 - y^2)}$.

Aufgabe 4: *(10 Punkte)*

a) Skizzieren Sie die Menge $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 < x^4 + y^4 \le 2\right\}$

Lösung:

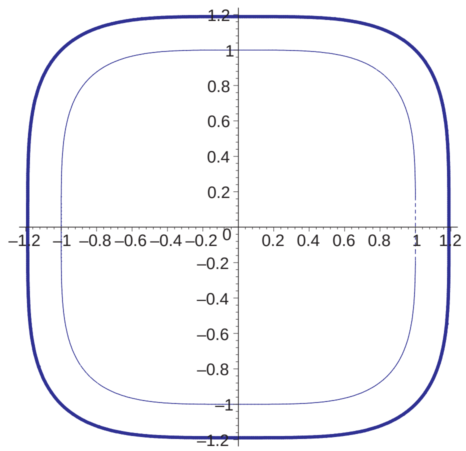
A ist die Fläche zwischen den beiden Ovalen

$$x^4 + y^4 = 1$$

und

$$x^4 + y^4 = 2\,,$$

wobei letzteres zu A gehört, ersteres aber nicht.



b) Entscheiden Sie für alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$, ob es sich dabei um innere, äußere oder Randpunkte von A handelt, und folgern Sie, daß A weder offen noch abgeschlossen ist!

Lösung: $(0, 0)$ ist ein äußerer Punkt, da $0^4 + 0^4 = 0 < 1$ ist und für jedes hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ auch die Punkte (x, y) mit $\|(x, y)\|_\infty < \varepsilon$ nicht in A liegen, denn $x^4+y^4 < 2\varepsilon^4$.

Die Punkte $(0,\pm 1)$ und $(\pm 1,0)$ liegen nicht in A, sind aber Randpunkte, denn für alle kleinen $\varepsilon > 0$ liegen die Punkte $\big(0,\pm(1+\varepsilon)\big)$ in A, nicht aber die Punkte $\big(0,\pm(1-\varepsilon)\big)$; entsprechendes gilt für $\big(\pm(1+\varepsilon),0\big)$ und $\big(\pm(1-\varepsilon),0\big)$. Genauso folgt, daß die Punkte $(\pm 1,\pm 1)$ Randpunkte sind, denn $\big(\pm(1+\varepsilon),\pm(1+\varepsilon)\big) \notin A$, aber $\big(\pm(1-\varepsilon),\pm(1-\varepsilon)\big) \in A$ für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$.

Für alle anderen Punkte (x,y) mit $x,y \in \mathbb{Z}$ ist $x^4 + y^4 \geq 2^4 = 16$; wegen der Stetigkeit von $f(x,y) = x^4 + y^4$ gibt es also eine offene Umgebung, in der $f(x,y) > 15$ ist und die somit nicht in A liegt. Daher sind dies alles äußere Punkte.

Wäre A eine abgeschlossene Menge, müßte A alle seine Randpunkte enthalten, insbesondere also den Punkt $(1,0)$, der aber nicht in $A >$ liegt. Wäre A offen, so wäre jeder Punkt von A ein innerer Punkt, was zumindest für den Randpunkt $(1,1) \in A$ nicht der Fall ist.

c) $\overline{A}$ sei der Abschluß von A. Entscheiden Sie für jede der Eigenschaften beschränkt, kompakt, wegzusammenhängend, zusammenhängend, ob sie für A oder $\overline{A}$ zutrifft!

Lösung: Der Abschluß von A ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält; insbesondere müssen alle Randpunkte von A dort liegen, d.h. die Punkte mit $x^4+y^4 = 1$ müssen noch dazugenommen werden. Dann haben wir die Menge $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| 1 \leq x^4 + y^4 \leq 2\big\}$, die abgeschlossen ist als Urbild von $[1,\, 2]$ unter der stetigen Abbildung $f(x,y) = x^4 + y^4$. Somit ist dies der Abschluß $\overline{A}$ von A.

Sowohl A als auch $\overline{A}$ liegen im Quadrat mit Ecken $(\pm 2,\pm 2)$, sind also beschränkt. $\overline{A}$ als abgeschlossene Menge ist damit auch kompakt, A aber nicht, da jede kompakte Menge abgeschlossen ist.

Sowohl A als auch $\overline{A}$ sind wegzusammenhängend: Jeder Punkt (x_0,y_0) läßt sich durch einen Teil des Ovals $x^4+y^4 = x_0^4+y_0^4$ mit dem Punkt $\big(\sqrt[4]{x_0^4+y_0^4},0\big)$ verbinden und zwei Punkte der Form $(x_1,0),(x_2,0)$ mit $x_1,x_2 > 0$ lassen sich dort eine ganz in A *bzw.* $\overline{A}$ verlaufende Strecke verbinden. Also lassen sich zwei beliebige Punkte verbinden durch eine Kombination aus einem Teil eines Ovals, einer Strecke und einem Teil eines anderen Ovals. Als wegzusammenhängende Mengen sind beide auch zusammenhängend.

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

Ein Unternehmen hat im Laufe der letzten fünf Jahre seinen Umsatz jedes Jahr um etwa 6% gesteigert, allerdings zeigen die Quartalszahlen deutliche saisonale Schwankungen. Man versucht daher, den Umsatz zum Zeitpunkt t, gemessen in Monaten, durch eine Funktion der Form $f(t) = ae^{t/200} + b\cos(\pi t/2)$ zu beschreiben. Bislang liegen sechzig Datenpaare (t_i,u_i) vor. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für die Parameter a und b auf, für die die Gleichungen $u_i = f(t_i)$ im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate am wenigsten falsch werden!

Lösung: Falls der Zusammenhang perfekt wäre, würden die gesuchten Parameter a und b den sechzig linearen Gleichungen $e^{t_i/200}\cdot a + \cos\frac{\pi t_i}{2}\cdot b = u_i$ genügen; in Matrixform ist dies das lineare Gleichungssystem

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = u \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} e^{t_1/200} & \cos\frac{\pi t_1}{2} \\ \vdots & \vdots \\ e^{t_{60}/200} & \cos t_{60} \end{pmatrix} \text{ und } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{60} \end{pmatrix}.$$

Dieses LGS für a und b wird praktisch immer unlösbar sein; die im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate beste Schätzung erhält man, indem man mit der transponierten

Matrix von A multipliziert: $(A^\mathsf{T}A)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = A^\mathsf{T}u$. Ausgeschrieben wird das zu

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{60} e^{t_i/100} & \sum\limits_{i=1}^{60} e^{t_i/200}\cos\frac{\pi t_i}{2} \\ \sum\limits_{i=1}^{60} e^{t_i/200}\cos\frac{\pi t_i}{2} & \sum\limits_{i=1}^{60} \cos^2\frac{\pi t_i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{60} u_i e^{t_i/200} \\ \sum\limits_{i=1}^{60} u_i \cos\frac{\pi t_i}{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6: (*8 Punkte)*

a) Die Funktion $f\colon(-1,1)\to\mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \int_0^\pi \sqrt{1-x^2\sin t}\,dt\,.$$

Zeigen Sie, daß f eine differenzierbare Funktion ist und geben Sie eine Formel für $f'(x)$ an!

Lösung: Da der Integrand stetig und partiell nach x differenzierbar ist, können wir die Integration über t mit der Differentiation nach x vertauschen und erhalten insbesondere auch, daß die Funktion differenzierbar ist. Die Ableitung des Integranden nach x ist nach der Kettenregel $\dfrac{-2x\sin t}{2\sqrt{1-x^2\sin t}}$; also ist $f'(x) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{-2x\sin t}{2\sqrt{1-x^2\sin t}}\,dt = \int_0^\pi \frac{-x\sin t}{\sqrt{1-x^2\sin t}}\,dt\,.$

b) R sei das achsenparallele Rechteck mit Ecken $(0,0)$ und $(1,\pi)$ in $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie

$$\int_R y\cos^2(xy)\,!$$

Lösung: Nach der Formelsammlung am Ende der Klausur ist $\cos^2(xy) = \frac12\big(1+\cos(2xy)\big)$, also

$$\int_R y\cos^2(xy) = \int_0^\pi\left(\int_0^1\left(\frac{y}{2}+\frac{y\cos(2xy)}{2}\right)dx\right)dy = \int_0^\pi\left(\frac{xy}{2}+\frac{y\sin(2xy)}{4y}\bigg|_0^1\right)dy$$
$$= \int_0^\pi\left(\frac{y}{2}+\frac{\sin 2y}{4}\right)dy = \frac{y^2}{4}-\frac{\cos 2y}{4}\bigg|_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}\,.$$