Wolfgang K. Seiler — A5, C201
Tel. 2515

12. Juni 2010

Modulklausur Analysis II

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •
• • • Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge • • •
• • • bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst • • •
• • • auf das, womit sie schnell Punkte holen können! • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge von Punkten aus $\mathbb{R}^n$, so konvergiert für jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ auch die Folge $\big(\|x_k\|\big)_{k\in\mathbb{N}}$.
2) *Richtig oder falsch:* Die Jacobi-Matrix einer differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann überall gleich der Nullmatrix, wenn f eine konstante Funktion ist.
3) *Richtig oder falsch:* Ist $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so gibt es Punkte $(x_m, y_m) \in \mathbb{R}^2$ sowie $(x_M, y_M) \in \mathbb{R}^2$, in denen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \varphi(\sin x, \cos y)$ ihr Minimum *bzw.* Maximum auf $\mathbb{R}^2$ annimmt.
4) *Richtig oder falsch:* Für jeden hinreichend kleinen Startwert x_0 definiert die Rekursion $x_k = \tan 2x_{k-1}$ eine Nullfolge.
5) *Richtig oder falsch:* Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion aus $K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, so auch $g(x) \underset{\text{def}}{=} \sin f(x)$.
6) *Richtig oder falsch:* Ist $Z \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, so auch $Z^* = \big\{nx \bigm| n \in \mathbb{N} \text{ und } x \in Z\big\}$.

Aufgabe 1: **(***8 Punkte)*

a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom vom Grad drei um den Punkt $(0, 0)$ für die Funktion $f(x, y) = 1 + e^{x-y} \cos(x + y)$!

b) Zeigen Sie, daß f weder lokale Extrema noch Sattelpunkte hat!

Aufgabe 2: **(***10 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2 - \sin(x + y)$ auf $\mathbb{R}^2$ genau ein relatives Extremum hat und entscheiden Sie, um was es sich dabei handelt!

b) Gibt es ein absolutes Maximum *bzw.* Minimum?

c) Bestimmen Sie das Maximum der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + yz$ unter den Nebenbedingungen $x, y, z > 0$ und $4x + 2y + z \le 12$!

Aufgabe 3: (*6 Punkte*)

a) Bestimmen Sie alle Punkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, in deren Umgebung sich die Gleichung

$$x^4 + 6x^2y - 2y^3 = 0$$

nicht eindeutig auflösen läßt zu einer expliziten Gleichung der Form $y = \varphi(x)$!

b) Was ist $\varphi'(x_0)$ für einen Punkt (x_0, y_0), der nicht zu diesen Ausnahmen zählt?

Aufgabe 4: (*10 Punkte*)

a) Skizzieren Sie die Menge $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 < x^4 + y^4 \le 2\right\}$

b) Entscheiden Sie für alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$, ob es sich dabei um innere, äußere oder Randpunkte von A handelt, und folgern Sie, daß A weder offen noch abgeschlossen ist!

c) $\overline{A}$ sei der Abschluß von A. Entscheiden Sie für jede der Eigenschaften beschränkt, kompakt, wegzusammenhängend, zusammenhängend, ob sie für A oder $\overline{A}$ zutrifft!

Aufgabe 5: (*6 Punkte*)

Ein Unternehmen hat im Laufe der letzten fünf Jahre seinen Umsatz jedes Jahr um etwa 6% gesteigert, allerdings zeigen die Quartalszahlen deutliche saisonale Schwankungen. Man versucht daher, den Umsatz zum Zeitpunkt t, gemessen in Monaten, durch eine Funktion der Form $f(t) = ae^{t/200} + b\cos(\pi t/2)$ zu beschreiben. Bislang liegen sechzig Datenpaare (t_i, u_i) vor. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für die Parameter a und b auf, für die die Gleichungen $u_i = f(t_i)$ im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate am wenigsten falsch werden!

Aufgabe 6: (*8 Punkte*)

a) Die Funktion $f\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \int_0^\pi \sqrt{1 - x^2 \sin t}\, dt\,.$$

Zeigen Sie, daß f eine differenzierbare Funktion ist und geben Sie eine Formel für $f'(x)$ an!

b) R sei das achsenparallele Rechteck mit Ecken $(0,0)$ und $(1,\pi)$ in $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie

$$\int_R y\cos^2(xy)\,!$$

Formelsammlung

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2} \qquad\qquad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Samstag, dem 12. Juni 2010, um 14^{30} Uhr