Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

15. Mai 2010

Probeklausur Analysis II

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •
• • • **Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge** • • •
• • • **bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst** • • •
• • • **auf das, womit sie schnell Punkte holen können!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Ist $\big((x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge von Punkten aus $\mathbb{R}^2$, so konvergiert auch die Folge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$.

Lösung: *Richtig,* denn die Multiplikationsabbildung ist stetig, und stetige Funktionen sind mit Grenzwertbildung vertauschbar, führen also insbesondere konvergente Folgen wieder in konvergente Folgen über.

2) Richtig oder falsch: Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = \big(\sin(x+y), e^{|xy|}\big)$ ist stetig.

Lösung: *Richtig,* denn Grundrechenarten, Sinus, Exponentialfunktion, Betrag sind allesamt stetig, und auch die Hintereinanderausführung stetiger Funktionen ist stetig.

3) Richtig oder falsch: Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung, so ist das Urbild $f^{-1}(A)$ einer abgeschlossenen Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$.

Lösung: *Richtig;* $U = \mathbb{R}^m \setminus A$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$, also ist $f^{-1}(U)$ offen in $\mathbb{R}^n$. Damit ist $f^{-1}(A) = \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(U)$ abgeschlossen.

4) Richtig oder falsch: Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, so nimmt jede stetige Funktion auf X sowohl ihr Supremum als auch ihr Infimum an.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise ist die offene Kreisscheibe $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$ zwar konvex, aber die Funktion $f(x,y) = x^2+y^2$ nimmt ihr Supremum eins nirgends auf X an. (Entsprechend nimmt auch $1 - f(x,y)$ sein Infimum Null nirgends an.)

5) Richtig oder falsch: Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige monoton wachsende Funktion und sind $x_1, \dots, x_n$ reelle Zahlen, so ist der Korrelationskoeffizient der Paare $\big(x_n, f(x_n)\big)$ gleich eins

Lösung: *Falsch;* das gilt nur für lineare Funktionen, nicht aber für Funktionen wie beispielsweise $f(x) = e^x$.

6) Richtig oder falsch: Jede zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist konvex.

Lösung: *Richtig,* denn eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist ein (eventuell unendliches) Intervall, und jedes Intervall enthält zu zwei beliebigen seiner Punkte auch deren Verbindungsstrecke.

Aufgabe 1: *(9 Punkte)*

a) Berechnen Sie Gradient und HESSE-Matrix der Funktion $f(x,y) = x^3 - 12xy^2 + 32y^3 - 72y^2$!

Lösung: Die partiellen Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 - 12y^2 = 3(x^2 - 4y^2) \\ f_y(x,y) &= -24xy + 96y^2 - 144y = -24y(x - 4y + 6) \\ f_{xx}(x,y) &= 6x \\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) &= -24y \\ f_{yy}(x,y) &= -24x + 192y - 144 = -24(x - 8y + 6)\,. \end{aligned}$$

Somit ist $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3(x^2 - 4y^2) \\ -24y(x - 3y + 6) \end{pmatrix}$ und

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -24y \\ -24y & -24(x + 8y + 6) \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x & -4y \\ -4y & -4(x - 8y + 6) \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie alle lokalen Minima und Maxima und Sattelpunkte von f auf $\mathbb{R}^2$!
Hinweis: Die Rechnung wird – nicht nur bei dieser Aufgabe – sehr viel angenehmer, wenn Sie gemeinsame Faktoren ausklammern, wo immer dies möglich ist.

Lösung: Da f differenzierbar ist, muß ∇f in jedem lokalen Extremum verschwinden. $f_x(x,y)$ verschwindet genau dann, wenn $x^2 = 4y^2$ oder $x - \pm 2y$ ist. f_y verschwindet einerseits dann, wenn y verschwindet; wegen $x = \pm 2y$ muß dann auch x verschwinden, wir sind also im Nullpunkt. Dort hat f weder ein Maximum noch ein Minimum, denn $f(x,0) = x^3$ nimmt in der Umgebung der Null sowohl positive als auch negative Werte an. $f_y(x,y)$ verschwindet auch, wenn $x = 4y - 6$ ist; im Falle $x = 2y$ ist dann $y = 3$ und $x = 6$, im Falle $x = -2y$ ist $y = 1$ und $x = -2$. Um zu entscheiden, was in diesen Punkten passiert, müssen wir in die die HESSE-Matrix einsetzen:

$$\begin{aligned} H_f(-2,1) &= 6 \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 16 \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ H_f(6,3) &= 6 \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -12 & -48 \end{pmatrix} = 36 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Determinante der ersten Matrix ist $12^2 \cdot (-8 - 4) < 0$, also ist die Matrix indefinit und der Punkt $(2,-1)$ ist ein Sattelpunkt.
Die Determinante der zweiten Matrix ist $36^2 \cdot (8 - 4) > 0$; da der Eintrag links oben negativ ist, haben wir hier eine negativ definite Matrix, d.h. im Punkt $(6,3)$ hat f ein lokales Maximum.

Aufgabe 2: *(9 Punkte)*

Ein Produkt wird aus zwei Komponenten hergestellt. Aus x Tonnen der ersten und y Tonnen der zweiten lassen sich $x^{1/3}y^{2/3}$ Einheiten herstellen. Eine Tonne der ersten Komponente kostet zehn Tausend Euro, eine Tonne des zweiten nur vier Tausend Euro. Wie viele Einheiten lassen sich mit einem Kapitaleinsatz von höchstens drei Millionen Euro produzieren?

Lösung: Die Funktion $f(x,y) = x^{1/3}y^{2/3}$ ist für festgehaltenes x streng monoton wachsend in y; daher ist im Maximum das Limit für den Kapitaleinsatz ausgeschöpft. Wenn wir in Einheiten von Tausend Euro rechnen, ist also im Maximum

$$g(x,y) \underset{\text{def}}{=} 10x + 4y - 3\,000 = 0\,.$$

Dort müssen auch die Gradienten

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x^{-2/3}y^{2/3} \\ \frac{2}{3}x^{1/3}y^{-1/3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

proportional zueinander sein; da $\nabla g(x,y)$ nirgends gleich dem Nullvektor ist, gibt es im Maximum daher einen LAGRANGE-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ ist. Konkret ist also

$$\frac{1}{3}x^{-2/3}y^{2/3} = 10\lambda \quad \text{und} \quad \frac{2}{3}x^{1/3}y^{-1/3} = 4\lambda$$

oder, ohne Nenner ausgedrückt,

$$x^{-2/3}y^{2/3} = 30\lambda \quad \text{und} \quad x^{1/3}y^{-1/3} = 6\lambda\,.$$

Somit ist im Maximum

$$30\lambda = x^{-2/3}y^{2/3} = 5x^{1/3}y^{-1/3}\,.$$

Multiplikation mit $x^{2/3}y^{1/3}$ führt auf die lineare Gleichung $y = 5x$. Einsetzen in die Nebenbedingung

$$g(x,y) = 10x + 4y - 3\,000 = 30x - 3\,000 = 0$$

führt auf $x = 100$ und $y = 500$. Da

$$f(100,500) = 100^{1/3}500^{2/3} = \sqrt[3]{100 \cdot 500^2} = \sqrt[3]{25\,000\,000} = 100\sqrt[3]{25} \approx 292{,}40\ldots$$

ist, können somit höchstens 292 Einheiten produziert werden.

Aufgabe 3: (*6 Punkte*)

a) Bestimmen Sie alle Punkte (x_0, y_0), in deren Umgebung sich die Gleichung

$$x^8 - 8x^7y + y^8 = 0$$

nicht eindeutig auflösen läßt zu einer expliziten Gleichung der Form $y = \varphi(x)$!

Lösung: Die Gleichung $f(x,y) = x^8 - 8x^7y + y^8 = 0$ kann in einem Punkt (x_0, y_0) mit $f(x_0, y_0)$ genau dann nicht eindeutig nach y aufgelöst werden, wenn $f_y(x_0, y_0)$ verschwindet, wenn also $-8x_0^7 + 8y_0^7 = 0$ und damit $x_0 = y_0$ ist. Setzen wir dies ein in $f(x_0, y_0) = 0$, erhalten wir die Gleichung $x_0^8 - 8x_0^8 + x_0^8 = -6x_0^8 = 0$; der Nullpunkt ist also der einzige Punkt auf der Kurve $f(x,y) = 0$, um den sich die Gleichung nicht eindeutig nach y auflösen läßt.

b) Was ist $\varphi'(x_0)$ für einen Punkt (x_0, y_0), in dem eine solche Auflösung existiert?

Lösung: Dort ist $\varphi'(x_0) = -\dfrac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0} = -\dfrac{8x_0^7 - 56x_0^6y_0}{-8x_0^7 + 8y_0^7} = \dfrac{x_0^7 - 7x_0^6y_0}{x_0^7 - y_0^7}\,.$

Aufgabe 4: (*10 Punkte*)

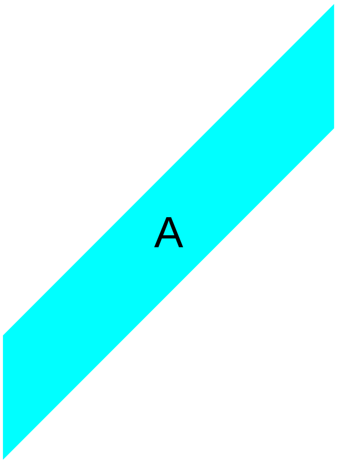
Wir betrachten die beiden Mengen

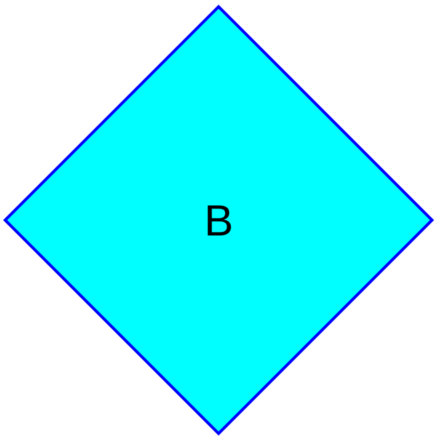
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x+y| < 3\right\} \quad \text{und} \quad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \le |x| + |y| \le 3\right\}.$$

a) Skizzieren Sie die beiden Mengen!

Lösung: $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ liegt genau dann in A, wenn $-3 < x+y < 3$ ist, wenn also $-x-3 < y < -x+3$ ist. Somit ist A der Streifen zwischen den beiden Geraden $y = -x-3$ und $y = -x+3$, die selbst aber nicht zu A gehören.

(x, y) liegt genau dann in B, wenn $1 \le |x|+|y| \le 3$ ist. Für positive x, y muß $1 \le x+y \le 3$ sein, (x, y) liegt also zwischen den Geraden $y = 1-x$ und $y = 3-x$. Entsprechende Überlegungen für die drei anderen Quadranten zeigen, daß B das die Fläche zwischen den Quadrat mit Ecken $(3, 0), (0, 3), (-3, 0)$ und $(0, -3)$ *bzw.* $(1, 0), (0, 1), (-1, 0)$ und $(0, -1)$ ist, wobei auch die Ränder Teil von B sind.





b) Entscheiden Sie von jeder der beiden Mengen, ob sie offen, abgeschlossen, beschränkt, kompakt, konvex, wegzusammenhängend und/oder zusammenhängend ist!

Lösung: A ist das Urbild des offenen Intervalls $(-3, 3)$ unter der stetigen Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = x+y$; da das Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Abbildung offen ist, ist A also eine offene Menge. Da A weder leer noch ganz $\mathbb{R}^2$ ist, kann A somit nicht abgeschlossen sein. (Alternativ: A enthält beispielsweise den Randpunkt $(1, 2)$ nicht.)

A ist nicht beschränkt, denn beispielsweise liegen die Punkte $(x, -x)$ für beliebig große $x \in \mathbb{R}$ in A. Dafür ist A aber konvex, denn für zwei Punkte (u, v) und (x, y) aus A ist

$$-3 < u+v < 3 \quad \text{und} \quad -3 < x+y < 3\,;$$

damit ist für jedes $\lambda \in (0, 1)$

$$-3(1-\lambda) < (1-\lambda)u + (1-\lambda)v < 3(1-\lambda) \quad \text{und} \quad -3\lambda < \lambda x + \lambda y < 3\lambda\,.$$

Addition der beiden Ungleichungen führt auf

$$-3 \le \big((1-\lambda)u + \lambda x\big) + \big((1-\lambda)v + \lambda y\big) < 3\,;$$

somit liegt auch der Punkt $(1-\lambda)(u, v) + \lambda(x, y)$ in A. Als konvexe Menge ist A erst recht wegzusammenhängend und auch zusammenhängend.

Die Menge B ist das Urbild des abgeschlossenen Intervalls $[1, 3]$ unter der stetigen Abbildung $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = |x| + |y|$, also abgeschlossen und damit, da weder leer noch der gesamte $\mathbb{R}^2$, nicht offen. (Alternativ: $(1, 2) \in B$ ist kein innerer Punkt.) Die Menge ist beschränkt, denn wenn $|x|+|y| \le 3$ ist, müssen insbesondere auch $|x|$ und $|y|$ kleiner oder gleich drei sein, also auch die Maximumsnorm von (x, y).

B ist nicht konvex, da beispielsweise die Verbindungsstrecke der beiden Punkte $(2,0)$ und $(0,2)$ aus B durch den Nullpunkt geht, der nicht in B liegt. B ist aber wegzusammenhängend, denn wir können jeden Punkt aus B durch eine Strecke parallel zur x-Achse mit einem Punkt auf dem äußeren Rand $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 3\}$ verbinden, und dieser ist als Rand eines Quadrats wegzusammenhängend. Somit lassen sich zwei beliebige Punkte aus B stets sogar durch einen Streckenzug verbinden. Als wegzusammenhängende Menge ist B insbesondere auch zusammenhängend.

c) Ist eine der beiden Mengen Teilmenge der anderen?

Lösung: *Nein:* Der Punkt $(-10,10)$ liegt in A, aber nicht in B, und $(3,0)$ liegt in B, aber nicht in A.

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*
Zeigen Sie, daß es genau ein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $2x - 1 = \sin^2 x$, und geben Sie eine Folge an, die gegen diesen Wert konvergiert!

Lösung: Wenn es ein solches x gibt, ist es Fixpunkt der Abbildung

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{2}(1 + \sin^2 x)\,,$$

und umgekehrt ist jeder Fixpunkt dieser Abbildung eine Lösung.
Da $\sin^2 x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ zwischen null und eins liegt, ist das Bild von f das abgeschlossene Intervall $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Wenn wir zeigen können, daß f auf diesem Intervall kontrahierend ist, folgt die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunkts aus dem BANACHschen Fixpunktsatz. Zum Nachweis der Kontraktionseigenschaft genügt es, den Betrag der Ableitung $f'(x)$ durch eine Schranke echt kleiner eins abzuschätzen.

$$f'(x) = \sin x \cos x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{4i} = \frac{\sin 2x}{2}$$

nimmt in der Tat nur Werte vom Betrag höchstens $\frac{1}{2}$ an, also ist f kontrahierend und es gibt genau einen Fixpunkt. Dieser kann berechnet werden, indem man mit einem beliebigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ startet und für $n \geq 1$ den Punkt x_n als $f(x_{n-1})$ definiert. (x_0 muß nicht unbedingt im Intervall $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ liegen, da $f(x_0)$ für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ automatisch dort liegt.) Für diese Folge ist $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ die gesuchte Lösung.

Aufgabe 6: *(8 Punkte)*
R sei das Rechteck mit Ecken $(\pm 3, 0)$ und $(\pm 3, 2)$ in $\mathbb{R}^2$.

a) Was ist $\int_R (2x + 3y)$?

Lösung:

$$\int_R (2x+3y) = \int_0^3 \left(\int_{-2}^2 (2x + 3y + 4xy)\,dx \right) dy = \int_0^2 \left(x^2 + 3xy + 2x^2 y \Big|_{-2}^2 \right) dy$$
$$= \int_0^2 12y\,dy = 6 \cdot 2^2 = 24$$

b) Was ist $\int_R e^{x+y}$?

Lösung:

$$\begin{aligned}\int_R e^{x+y} &= \int_0^3 \left(\int_{-2}^{2} e^{x+y}\, dx \right) dy = \int_0^3 \left(\int_{-2}^{2} e^x e^y\, dx \right) dy = \int_0^3 \left(e^y \int_{-2}^{2} e^x\, dx \right) dy \\ &= \int_0^3 e^y \left(e^2 - e^{-2}\right) dy = \left(e^2 - e^{-2}\right) \int_0^3 e^y\, dy = \left(e^2 - e^{-2}\right)\left(e^3 - 1\right) \\ &= e^5 - e^2 - e + e^{-2}\end{aligned}$$