

15. Mai 2010

Probeklausur Analysis II

- • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •
• • • Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge • • •
• • • bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst • • •
• • • auf das, womit sie schnell Punkte holen können! • • •

Fragen: (je zwei Punkte)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Ist $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge von Punkten aus \mathbb{R}^2 , so konvergiert auch die Folge $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} .
- 2) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (\sin(x + y), e^{|xy|})$ ist stetig.
- 3) *Richtig oder falsch:* Ist $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung, so ist das Urbild $f^{-1}(A)$ einer abgeschlossenen Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen in \mathbb{R}^n .
- 4) *Richtig oder falsch:* Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, so nimmt jede stetige Funktion auf X sowohl ihr Supremum als auch ihr Infimum an.
- 5) *Richtig oder falsch:* Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige monoton wachsende Funktion und sind x_1, \dots, x_n reelle Zahlen, so ist der Korrelationskoeffizient der Paare $(x_n, f(x_n))$ gleich eins
- 6) *Richtig oder falsch:* Jede zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{R} ist konvex.

Aufgabe 1: (9 Punkte)

- a) Berechnen Sie Gradient und HESSE-Matrix der Funktion $f(x, y) = x^3 - 12xy^2 + 32y^3 - 72y^2$!
- b) Bestimmen Sie alle lokalen Minima und Maxima und Sattelpunkte von f auf \mathbb{R}^2 !
Hinweis: Die Rechnung wird – nicht nur bei dieser Aufgabe – sehr viel angenehmer, wenn Sie gemeinsame Faktoren ausklammern, wo immer dies möglich ist.

Aufgabe 2: (9 Punkte)

Ein Produkt wird aus zwei Komponenten hergestellt. Aus x Tonnen der ersten und y Tonnen der zweiten lassen sich $x^{1/3} y^{2/3}$ Einheiten herstellen. Eine Tonne der ersten Komponente kostet zehn Tausend Euro, eine Tonne des zweiten nur vier Tausend Euro. Wie viele Einheiten lassen sich mit einem Kapitaleinsatz von höchstens drei Millionen Euro produzieren?

Aufgabe 3: (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Punkte (x_0, y_0) , in deren Umgebung sich die Gleichung

$$x^8 - 8x^7y + y^8 = 0$$

nicht eindeutig auflösen läßt zu einer expliziten Gleichung der Form $y = \varphi(x)$!

b) Was ist $\varphi'(x_0)$ für einen Punkt (x_0, y_0) , in dem eine solche Auflösung existiert?

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Wir betrachten die beiden Mengen

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| < 3\} \quad \text{und} \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |x| + |y| \leq 3\}.$$

- a) Skizzieren Sie die beiden Mengen!
- b) Entscheiden Sie von jeder der beiden Mengen, ob sie offen, abgeschlossen, beschränkt, kompakt, konvex, wegzusammenhängend und/oder zusammenhängend ist!
- c) Ist eine der beiden Mengen Teilmenge der anderen?

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Zeigen Sie, daß es genau ein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $2x - 1 = \sin^2 x$, und geben Sie eine Folge an, die gegen diesen Wert konvergiert!

Aufgabe 6: (8 Punkte)

R sei das Rechteck mit Ecken $(\pm 3, 0)$ und $(\pm 3, 2)$ in \mathbb{R}^2 .

- a) Was ist $\int_R (2x + 3y)$?
- b) Was ist $\int_R e^{x+y}$?

Abgabe bis zum Samstag, dem 15. Mai 2010, um 11³⁰ Uhr

• • •

Steht Ihr Name auf jedem Blatt?

• • •