Wolfgang K. Seiler
*Tel.* 2515

A5, Zimmer C201

# Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 2. Juni 2010

*a)* Finden Sie die größte Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$, auf der die Funktion $f(x) = \log \dfrac{1}{x^2+y^2}$ definiert ist, und entscheiden Sie, in welchen Punkten $(x,y) \in D$ die Funktion stetig ist!

**Lösung:** Der Logarithmus ist eine stetige Funktion von der Menge der positiven reellen Zahlen in die Menge aller reeller Zahlen, und das Argument $1/(x^2+y^2)$ ist eine positive reelle Zahl für alle $(x,y) \neq (0,0)$. Somit ist $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

*b)* Zeigen Sie, daß für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ im Nullpunkt alle partiellen Ableitungen existieren, daß f dort aber nicht stetig ist!

**Lösung:**

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \quad \text{und}$$
$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0\,;$$

also existieren beide partiellen Ableitungen. Trotzdem ist f nicht stetig in $(0,0)$; denn für jede reelle Zahl $a$ und jedes $x \neq 0$ ist

$$f(x,ax) = \frac{ax^2}{x^2+a^2x^2} = \frac{a}{1+a^2}\,,$$

aber $f(0,0) = 0$.

*c)* Finden Sie die Extrema der Funktion $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^2$ auf dem (abgeschlossenen) Quadrat mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$!

**Lösung:** Jedes Extremum ist entweder ein lokales Extremum oder liegt auf dem Rand. In einem lokalen Extremum verschwinden die partiellen Ableitungen

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 3y \quad \text{und} \quad f_y(x,y) = 3x + 2y\,,$$

also ist einerseits $y = -x^2$, andererseits $y = -\frac{3}{2}x$, d.h. $x^2 = \frac{3}{2}x$ und damit $x = \frac{3}{2} > 1$. Im betrachteten Quadrat gibt es also keine lokalen Extrema.

Auf dem Rand wird für $x = +1$ der Wert $1 + 3y + y^2$ angenommen; die Ableitung dieser Funktion ist $3 + 2y$, und damit positiv auf der ganzen Kante. Sie nimmt ihr Maximum daher im Punkt $y = 1$ an, und dort haben wir $f(1,1) = 5$. Ihr Minimum nimmt sie entsprechend bei $y = -1$ an; dort ist $f(1,-1) = -1$.

Für $x = -1$ ist $f(-1,y) = -1 - 3y + y^2$ mit Ableitung $-3 + 2y < 0$, also wir auf dieser Kante bei $y = -1$ das Maximum 3 angenommen und bei $y = 1$ das Minimum -3.

Auf der Kante mit $y = 1$ ist $f(x,1) = x^3 + 3x + 1$ mit Ableitung $3x^2 + 3 > 0$, und für $y = -1$ ist $f(x,-1) = x^3 - 3x + 1$ mit Ableitung $3x^2 - 3 \geq 0$, wobei nur für $x = \pm 1$ das Gleichheitszeichen gilt. Somit werden Extrema auch auf diesen beiden Kanten nur in den Ecken angenommen, wo wir die Funktionswerte bereits kennen. Das Maximum von f auf dem vorgegebenen Quadrat ist daher $f(1,1) = 5$. das Minimum $f(-1,1) = -3$.

*d)* Zeigen Sie: $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ist in jedem Punkt $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ aus $\mathbb{R}^3$ mindestens zweimal stetig differenzierbar und

$$f_{xx}(x,y,z) + f_{yy}(x,y,z) + f_{zz}(x,y,z) = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ !$$

**Lösung:** Nach der Kettenregel ist

$$f_x(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2} \cdot (2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

und

$$f_{xx}(x,y,z) = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\ ;$$

entsprechend ist

$$f_{yy}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{y^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \quad \text{und}$$

$$f_{zz}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\ .$$

Somit ist

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y,z) + f_{yy}(x,y,z) + f_{zz}(x,y,z) &= \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x^2+y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ , \end{aligned}$$

wie behauptet.

*e)* Bestimmen Sie den maximalen Wert, den die Funktion $f(x,y) = \sqrt{x}\,\sqrt[3]{y}$ unter den Nebenbedingungen $x \geq 0$, $y \geq 0$ und $3x + 2y \leq 320$ annehmen kann!

**Lösung:** Der Gradient $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt[3]{y}}{2\sqrt{x}} \\ \frac{\sqrt{x}}{3y^{2/3}} \end{pmatrix}$ ist nicht definiert, wenn $x$ oder $y$ verschwindet; dann ist aber ohnehin $f(x,y) = 0$, und das kann nicht der maximale Wert sein, da beispielsweise $f(1,1) = 1$ größer ist und $(1,1)$ die Nebenbedingung erfüllt. Also können wir im folgenden stets annehmen, daß $x$ und $y$ beide nicht verschwinden.

Offensichtlich verschwindet der Gradient nirgends, es gibt also keine (relativen) Maxima ohne Berücksichtigung der Nebenbedingungen, und für ein Maximum mit Berücksichtigung der Nebenbedingung muß in dieser offensichtlich das Gleichheitszeichen gelten, denn bei Vergrößerung sowohl von $x$ als auch von $y$ vergrößert sich auch der Funktionswert.

Nach Lagrange folgt daher, daß im Maximum (so eines existiert) die Gradienten von $f$ und der Nebenbedingung $g(x,y) = 3x + 2y - 320$ linear abhängig sein müssen. Da auch $\nabla g(x,y) = \binom{3}{2}$ nirgends verschwindet, muß es dort also ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben mit

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt[3]{y}}{2\sqrt{x}} \\ \frac{\sqrt{x}}{3y^{2/3}} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

oder, ausgeschrieben,

$$\frac{\sqrt[3]{y}}{2\sqrt{x}} = 3\lambda \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{x}}{3y^{2/3}} = 2\lambda\ .$$

Auflösen nach $\lambda$ führt auf die Gleichung

$$\frac{\sqrt[3]{y}}{6\sqrt{x}} = \lambda = \frac{\sqrt{x}}{6y^{2/3}}\ ,$$

und Multiplikation mit $6\sqrt{x}\,y^{2/3}$ (möglich, da $x, y \neq 0$) macht daraus die deutlich angenehmere Gleichung $y = x$.

Einsetzen in die Nebenbedingung zeigt, daß

$$g(x,x) = 3x + 2x - 320 = 5x - 320 = 0 \quad \text{oder} \quad x = y = 64$$

sein muß. Dort ist $f(64,64) = \sqrt{64} \cdot \sqrt[3]{64} = 8 \cdot 4 = 32$.

Da die Nebenbedingungen eine abgeschlossene und beschränkte, also kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ definieren, muß es dort ein Maximum geben; nach LAGRANGE ist es das gerade berechnete. Somit ist der gesuchte Maximalwert gleich 32.

*f)* Zeigen Sie, daß es eine differenzierbare Funktion $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ gibt, so daß die Punkte $(x,y) = \big(x, f(x)\big)$ die Gleichung $(x^2+y^2)^2 - x^3 + 3xy^2 = 0$ erfüllen, und berechnen Sie deren Ableitung $f'(x)$!

**Lösung:** Für $F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - x^3 + 3xy^2$ ist

$$F_y(x,y) = 4y(x^2+y^2) + 6xy = 2y(2x^2+2y^2+3x)\,.$$

Dies verschwindet für $y = 0$; wegen $F(x,0) = x^4 - x^3 = x^3(x-1)$ muß dann $x = 0$ oder $x = 1$ sein, was beides nicht in $(0,1)$ liegt. Außerdem verschwindet $F_y$, wenn $x^2+y^2 = -\frac{3}{2}x$ ist; dann ist

$$\begin{aligned} F(x,y) &= (x^2+y^2)^2 - x^3 + 3xy^2 = (x^2+y^2)^2 - x^3 + 3x\big((x^2+y^2) - x^2\big) \\ &= \frac{9}{4}x12 - x^3 + 3x\left(-\frac{3x}{2}x - x^2\right) = -4x^3 - \frac{9}{4}x^2 = -4xy^2\left(x + \frac{9}{16}\right)\,, \end{aligned}$$

was nur für $x = 0$ und $x = -\frac{9}{16}$ verschwindet. Für alle Punkte $(x,y)$ mit $F(x,y) = 0$ und $x \in (0,1)$ ist daher $F_y(x,y) \neq 0$, die Funktion kann also eindeutig nach$y$ aufgelöst werden. Um auch die Ableitung der so definierten Funktion $y = f(x)$ zu bestimmen, brauchen wir noch

$$F_x(x,y) = 4x(x^2+y^2) - 3x^2 + 3y^2$$

und erhalten $f'(x) = -\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = \dfrac{3(x^2-y^2) - 4(x^2+y^2)}{2y(2x^2+2y^2+3x)}$ .

*g)* $Q$ sei das achsenparallele Rechteck mit Ecken $(0,\pi)$ und $(1,2\pi)$. Berechnen sie $\int_Q f$ für $f(x,y) = y\cos(xy)$!

**Lösung:**

$$\begin{aligned} \int_Q f &= \int_\pi^{2\pi} \left( \int_0^1 y\cos(xy)\,dx \right) dy = \int_\pi^{2\pi} \left(\sin(xy)\big|_0^1\right) dy = \int_\pi^{2\pi} \sin y\,dy \\ &= -\cos y \Big|_\pi^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos\pi = -2\,. \end{aligned}$$

*h)* Zeigen Sie, daß die durch $x_0 = 1$ und $x_k = \cos\frac{1}{2}x_{k-1}^2$ definierte Folge konvergiert, und geben Sie eine Gleichung an, die der Grenzwert erfüllt!

**Lösung:** Falls wir den BANACHschen Fixpunktsatz anwenden können, folgt die Konvergenz und wir wissen, daß der Grenzwert$x$ die Gleichung $x = \cos\frac{1}{2}x^2$ erfüllt. Da $\cos\frac{1}{2}x^2$ nur Werte im Intervall $[-1,1]$ annimmt, reicht es dazu, wenn wir ein $M < 1$ finden können, so daß die Ableitung dieser Funktion im Intervall $[-1,1]$ überall Betrag kleineroder gleich $M$ hat. Die Ableitung ist $-x\sin\frac{1}{2}x^2$ und hat somit überall in diesem Intervall einen Betrag $\leq 2\sin\frac{1}{2} \approx 0{,}48$. Damit ist alles bewiesen.

*i)* Ist die Menge $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \pi \text{ und } 0 \le y \le \sin x\}$ konvex, wegzusammenhängend, zusammenhängend und/oder kompakt?

**Lösung:** Für $f(x) = \sin x$ ist $f''(x) = -\sin x$, und das ist für $0 < x < \pi$ negativ. Somit ist der Sinus über dem betrachteten Intervall eine konvexe Funktion, d.h. die Fläche $A$ zwischen seinem Graphen und der $x$-Achse ist konvex. Damit ist $A$ erst recht wegzusammenhängend und zusammenhängend. $A$ ist auch kompakt, denn wegen der $\le$-Zeichen ist $A$ abgeschlossen, und die Beschränktheit ist ohnehin klar.

*j)* Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ positiv definit, positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit *bzw.* indefinit?

**Lösung:** $\det A = 1 - a^2$ ist genau dann positiv, wenn $|a| < 1$ ist. Da beispielsweise der Diagonaleintrag links oben positiv ist, ist die Matrix in diesem Fall positiv definit. Die Matrix ist indefinit, falls $|a| > 1$ ist, denn dann ist die Determinante negativ, also gibt es zwei Eigenwerte mit verschiedenen Vorzeichen. Für $a = \pm 1$ schließlich ist $A = \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix}$ und gehört zur quadratischen Form $x^2 + y^2 \pm 2xy = (x \pm y)^2$, ist also positiv semidefinit.

*k)* Konvergiert die Folge der Funktionen $f_k(x) = \dfrac{k}{k+x}$ auf dem Intervall $[0, 1]$ punktweise, gleichmäßig *bzw.* bezüglich der $L^1$-Norm?

**Lösung:** $f_k(x) = \dfrac{k}{k+x} = \dfrac{1}{1+\frac{x}{k}}$ konvergiert für jedes $x \in [0, 1]$ gegen die Eins; zumindest punktweise konvergiert die Folge also. Die Differenz zur Grenzfunktion ist

$$\left|1 - \frac{k}{k+x}\right| = 1 - \frac{k}{k+x} = \frac{x}{k+x}\,;$$

für die gleichmäßige Konvergenz müssen wir uns überlegen, ob wir dafür eine von $x$ unabhängige Schranke finden können. Die Ableitung dieser Differenz ist

$$\frac{k+x-x}{(x+k)^2} = \frac{k}{(x+k)^2} > 0 \quad \text{für alle } x \in [0, 1]\,;$$

somit steigt die Differenz zum Intervallende hin an und hat dort ihren größten Wert, d.h.

$$|1 - f_k(x)| \le 1 - f_k(1) = \frac{1}{1+k}\,.$$

Damit ist die gleichmäßige Konvergenz klar: Zu jedem $\varepsilon > 0$ können wir ein $N \in \mathbb{N}$ finden, so daß $N > \frac{1}{\varepsilon}$ ist, und für alle $k \ge N$ ist dann $|1 - f_k(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in [0, 1]$.

Bleibt noch die Frage nach der Konvergenz in der $L^1$-Norm. Wenn wir die Funktion nur auf $[0, 1]$ betrachten, ist

$$\begin{aligned}\|1 - f_k\|_1 &= \int_0^1 |1 - f_k(x)|\,dx = \int_0^1 \frac{x}{k+x}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{k+x}{k+x} - \frac{k}{k+x}\right)dx = \int_0^1 dx - k\int_0^1 \frac{dx}{k+x} \\ &= 1 - k\,\log(k+x)\Big|_0^1 = 1 - k\log(k+1) - k\log k = 1 - k\log\frac{k+1}{k}\,.\end{aligned}$$

Das Argument des Logarithmus ist eine Folge, die für $k \to \infty$ gegen eins konvergiert; wegen der Stetigkeit des Logarithmus konvergiert also die Differenz gegen $\log 1 = 0$. Der Vorfaktor $k$ allerdings geht gegen unendlich, wir haben also ein Produkt der Form „$0 \times \infty$“. Wegen $k\log\frac{k+1}{k} = k\log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ ist

$$\lim_{k\to\infty} k\log\frac{k+1}{k} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log(1+x) = \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = 1$$

nach der Regel von DE L'HÔPITAL. Somit konvergiert die Folge der $L^1$-Normen der Differenzen gegen $1 - 1 = 0$, womit auch die Konvergenz bezüglich der $L^1$-Norm gezeigt wäre.