Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 2. Juni 2010

a) Finden Sie die größte Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$, auf der die Funktion $f(x) = \log \dfrac{1}{x^2+y^2}$ definiert ist, und entscheiden Sie, in welchen Punkten $(x,y) \in D$ die Funktion stetig ist!

b) Zeigen Sie, daß für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ im Nullpunkt alle partiellen Ableitungen existieren, daß f dort aber nicht stetig ist!

c) Finden Sie die Extrema der Funktion $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^2$ auf dem (abgeschlossenen) Quadrat mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$!

d) Zeigen Sie: $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ist in jedem Punkt $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ aus $\mathbb{R}^3$ mindestens zweimal stetig differenzierbar und

$$f_{xx}(x,y,z) + f_{yy}(x,y,z) + f_{zz}(x,y,z) = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,!$$

e) Bestimmen Sie den maximalen Wert, den die Funktion $f(x,y) = \sqrt{x}\,\sqrt[3]{y}$ unter den Nebenbedingungen $x \geq 0$, $y \geq 0$ und $3x + 2y \leq 320$ annehmen kann!

f) Zeigen Sie, daß es eine differenzierbare Funktion $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ gibt, so daß die Punkte $(x,y) = \big(x, f(x)\big)$ die Gleichung $(x^2+y^2)^2 - x^3 + 3xy^2 = 0$ erfüllen, und berechnen Sie deren Ableitung $f'(x)$!

g) Q sei das achsenparallele Rechteck mit Ecken $(0,\pi)$ und $(1,2\pi)$. Berechnen sie $\int_Q f$ für $f(x,y) = y\cos(xy)$!

h) Zeigen Sie, daß die durch $x_0 = 1$ und $x_k = \cos \frac{1}{2} x_{k-1}^2$ definierte Folge konvergiert, und geben Sie eine Gleichung an, die der Grenzwert erfüllt!

i) Ist die Menge $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; 0 \leq x \leq \pi \text{ und } 0 \leq y \leq \sin x\big\}$ konvex, wegzusammenhängend, zusammenhängend und/oder kompakt?

j) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ positiv definit, positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit *bzw.* indefinit?

k) Konvergiert die Folge der Funktionen $f_k(x) = \dfrac{k}{k+x}$ auf dem Intervall $[0, 1]$ punktweise, gleichmäßig *bzw.* bezüglich der L^1-Norm?