WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 25. Mai 2010

a) Zeigen Sie, daß sich jede natürliche Zahl eindeutig darstellen läßt in der Form $\frac{1}{2}m(m+1)+\ell$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $1 \le \ell \le m+1$ und folgern Sie, daß die Abbildung $\varphi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\varphi(k,\ell) = \frac{1}{2}(k+\ell-2)(k+\ell-1)+\ell$ bijektiv ist!

Lösung: $S_m = \frac{1}{2}m(m+1)$ ist die Summe der ersten m natürlichen Zahlen. Damit ist klar, daß die Folge der S_m streng monoton wächst; es gibt also zu jeder natürlichen Zahl n genau ein $m \in \mathbb{N}_0$, so daß $S_m < n \le S_{m+1}$ ist. Ebenfalls wegen der Summeninterpretation ist $S_{m+1} - S_m = m+1$; schreiben wir also $n = S_m + \ell$, muß $1 \le \ell \le m+1$ sein.

Diese Darstellung ist eindeutig, denn ist $n = S_m + \ell$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $1 \le \ell \le m+1$, so ist $S_m < n \le S_m + (m+1) = S_{m+1}$, womit m und damit natürlich auch ℓ eindeutig bestimmt wäre.

Betrachten wir nun die Abbildung φ. Zunächst ist $\varphi(k,\ell)$ für alle $k,\ell \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, denn $k+\ell-2 \ge 0$, so daß der erste Summand in $\mathbb{N}_0$ liegt, die Summe also wegen $\ell \ge 1$ in $\mathbb{N}$.

Die Bijektivität läßt sich am einfachsten nachweisen, indem wir eine Umkehrabbildung $\psi: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ konstruieren: Wir schreiben eine vorgegebene natürliche Zahl n als $S_m + \ell$ mit $1 \le \ell \le m+1$ und setzen $k = m+2-\ell$. Dann ist $k \in \mathbb{N}$ und

$$S_m + \ell = \frac{m(m+1)}{2} + \ell = \frac{(k+\ell-2)(k+\ell-1)}{2} + \ell = \varphi(k,\ell)\,;$$

wir setzen also $\psi(n) = (k,\ell)$: Wie wir gerade gesehen haben, ist $\varphi \circ \psi$ die Identität auf $\mathbb{N}$; starten wir umgekehrt mit $(k,\ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, so ist $\varphi(k+\ell) = S_{k+l-2} + \ell$ und $1 \le \ell \le k+\ell-1$, also $\psi\bigl(\varphi(n)\bigr) = (k,\ell)$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Abbildung φ, daß für jede abzählbar unendliche Menge A und jede natürliche Zahl n auch $A \times A$ abzählbar unendlich ist!

Lösung: Eine Menge ist genau dann abzählbar unendlich, wenn es eine bijektive Abbildung $\psi: \mathbb{N} \to A$ gibt. Dann ist auch die Abbildung

$$\Psi: \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times A \\ (k,\ell) \mapsto \bigl(\psi(k), \psi(\ell)\bigr) \end{cases}$$

bijektiv, und $\Psi \times \varphi: \mathbb{N} \to A \times A$ ist die gewünschte Bijektion.

c) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind Nullmengen?

$$A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \qquad B = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}, \qquad C = \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x+y \in \mathbb{Q}\bigr\},$$
$$D_\varepsilon = \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| |xy| < \varepsilon\bigr\} \quad \text{mit } \varepsilon > 0, \qquad E = \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| y = \sin x\bigr\}$$

Lösung: $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ist als Produkt zweier abzählbarer Mengen selbst abzählbar, also Nullmenge. $B = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ ist zwar nicht abzählbar, aber trotzdem Nullmenge, denn für jedes $x \in \mathbb{Q}$ ist $\mathbb{R} \times \{x\} = \bigl\{(y,x) \bigm| y \in \mathbb{R}\bigr\}$ eine Nullmenge, und die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.

Aus demselben Grund ist auch C eine Nullmenge, denn für jedes $q \in \mathbb{Q}$ ist

$$C_q = \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x+y = q\bigr\} = \bigl\{(x, q-x) \bigm| x \in \mathbb{R}\bigr\}$$

eine Nullmenge, und C ist die Vereinigung der abzählbar vielen C_q.

D_ε ist für kein $\varepsilon > 0$ eine Nullmenge, denn für alle (x, y) mit $|x| < \sqrt{\varepsilon}$ und $|y| < \sqrt{\varepsilon}$ liegen in D_ε, so daß der Nullpunkt ein innerer Punkt ist. Wie wir wissen, haben Nullmengen keine inneren Punkte.

E schließlich ist wieder eine Nullmenge als Bild von $\mathbb{R}$ unter der stetig differenzierbaren Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto (x, \sin x)$.

d) *Richtig oder falsch:* Sind $A \subset \mathbb{R}^n$ und $B \subset \mathbb{R}^m$ Nullmengen, so ist auch $A \times B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ eine Nullmenge.

Lösung: *Richtig:* Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da A und B Nullmengen sind, gibt es abzählbare Quaderüberdeckungen von A und B mit Gesamtvolumen jeweils kleiner als $\sqrt{\varepsilon}$. Nehmen wir nun alle Quader der Form $Q_i \times Q_j$, wobei Q_i einer der Quader aus der Überdeckung von A ist und Q_j entsprechend von B, so ist die Menge aller dieser Quader abzählbar und sie überdecken $A \times B$. Für festes i ist das Volumen der sämtlichen Quader $Q_i \times Q_j$ das Volumen von Q_i mal der Summe der Volumina derQ_j, also kleiner als $\mu(Q_i)\sqrt{\varepsilon}$. Summieren wir nun noch über alle i, erhalten wir eine Summe kleiner $\sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$.

e) $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ seien zwei stetige Abbildungen auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Falls $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in D$, ist $f = g$.

Lösung: Wir betrachten die Menge A aller $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) \neq g(x_0)$. Nach Voraussetzung ist dies eine Nullmenge; falls sie leer ist, sind wir fertig. Andernfalls sei x_0 ein Punkt aus$A$. Da eine Nullmenge keine inneren Punkte hat, liegen in jeder Umgebung von x_0 Punkte, die nicht aus A sind. Wir wählen jeweils einen solchen Punkt x_k aus der Kugel mit Radius $1/k$ um x_0. Dann ist $f(x_k) = g(x_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und da die Folge der x_k gegen x_0 konvergiert, ist wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von f und g

$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} g(x_k) = g(x_0)\,,$$

im Widerspruch zur Annahme $x_0 \in A$. Also ist $A = \emptyset$ und $f = g$.

f) *Richtig oder falsch:* $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn $\mu^*(A) = 0$ ist.

Lösung: Das sind im wesentlichen einfach die Definitionen: Ist A eine Nullmenge, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Quaderüberdeckung von$A$ mit Gesamtvolumen kleiner ε, die Menge aller solcher Volumina enthält also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Element, das kleiner ist als ε. Damit muß $\mu^*(A)$ als Infimum dieser Menge verschwinden.

Ist umgekehrt $\mu^*(A) = 0$, so gibt es, da dies die kleinste untere Schranke der Menge ist, für jedes $\varepsilon > 0$ eine Quaderüberdeckung von A mit Gesamtvolumen kleiner alsε; die Menge$A$ ist daher eine Nullmenge.

g) Zeigen Sie, daß durch $f_k(x) = \max\{0, k - k^2\,|x|\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Funktion aus $K^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definiert wird!

Lösung: $k - k^2\,|x|$ verschwindet genau dann, wenn $|x| = 1/k$ ist; wird der Betrag größer, wird der Ausdruck negativ und damit $f_k(x) = 0$. Der Träger von f_k ist daher das abgeschlossene Intervall $[-1/k, 1/k]$, also kompakt. Außerdem ist f_k stetig, denn im Innern dieses Intervalls ist es durch die stetigen Funktionen $k + k^2 x$ für $x < 0$ und $k - k^2 x$ für $k > 0$ gegeben; die für $x = 0$ beide den Wert k haben. An den Intervallgrenzen ist die Funktionen, genau wie außerhalb, gleich Null.

h) Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}} f_k$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k$!

Lösung:

$$\int_R f_k = \int_{-1/k}^{1/k} \bigl(k - k^2\,|x|\bigr)\,dx = 2\int_0^{1/k} (k - k^2 x)\,dx = 2\left(kx - k^2\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{1/k}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1\,,$$

und damit ist auch $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k = 1$.

i) Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge in $K_1^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

Lösung: Für $\ell > k$ ist

$$\|f_\ell - f_k\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f_\ell - f_k| = \int_{-1/k}^{1/k} |f_\ell(x) - f_k(x)|\, dx = 2\int_0^{1/k} |f_\ell(x) - f_k(x)|\, dx\,,$$

da der Integrand eine gerade Funktion ist. Für $x > 1/\ell$, verschwindet $f_\ell(x)$, wir müssen also über f_k integrieren. Für kleinere positivex ist

$$f_\ell(x) - f_k(x) = (\ell - \ell^2 x) - (k - k^2 x) = (\ell - k) - (\ell^2 - k^2)x = 0 \iff x = \frac{\ell - k}{\ell^2 - k^2} = \frac{1}{\ell + k}\,;$$

für größere x ist $f_k(x)$ größer, für kleinere $f_\ell(x)$. Somit ist

$$\|f_\ell - f_k\|_1 = \int_0^{1/(k+\ell)} \big(f_\ell(x) - f_k(x)\big)\, dx + \int_{1/(k+\ell)}^{1/\ell} \big(f_k(x) - f_\ell(x)\big)\, dx + \int_{1/\ell}^{1/k} f_k(x)\, dx$$

$$= \int_0^{1/(k+\ell)} \big((\ell - k) - (\ell^2 - k^2)x\big)\, dx + \int_{1/(k+\ell)}^{1/\ell} \big((k - \ell) - (k^2 - \ell^2)x\big)\, dx + \int_{1/\ell}^{1/k} (k - k^2 x)\, dx\,.$$

Diese Integrale können wir ohne größere Probleme ausrechnen; am einfachsten ist das letzte:

$$\int_{1/\ell}^{\frac{1}{k}} (k - k^2 x)\, dx = k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{\ell}\right) - \frac{k^2}{2}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{\ell^2}\right)\,.$$

Für $\ell \to \infty$ geht dies gegen $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, womit eigentlich schon klar ist, daß $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine CAUCHY-Folge ist. Spezieller können wir auch $\ell = 2k$ einsetzen; dann erhalten wir $1/8$. Da keiner der drei Integranden negativ werden kann, ist somit $\|f_k - f_{2k}\| \geq \frac{1}{8}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, kann also unmöglich für alle hinreichend großen k kleiner sein als beispielsweise $\varepsilon = \frac{1}{10}$, so daß wir ganz konkret sehen, daß die Definition einer CAUCHY-Folge nicht erfüllt ist.

j) Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge in $K_\infty^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

Lösung: Im Punkt $x = 0$ ist $f_\ell(x) - f_k(x) = \ell - k$; damit ist $\|f_\ell - f_k\|_\infty \geq |\ell - k|$, also kann dies keine CAUCHY-Folge sein.

k) Gibt es eine Funktion f, gegen die $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert?

Lösung: *Nein,* denn die Folge der $f_k(0) = k$ divergiert.

l) Gibt es eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegen die $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall (punktweise) konvergiert?

Lösung: *Ja,* denn für alle $x \neq 0$ konvergiert die Folge der $f_k(x)$ gegen Null, da $f_k(x) = 0$ für alle $k > 1/|x|$.

m) Für $r > 0$ sei $g_r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g_r(x) = \begin{cases} e^{\dfrac{4r}{(b-a)^2}}\, e^{\dfrac{-r}{(x-a)(b-x)}} & \text{falls } a < x < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß g_r eine Funktion mit kompaktem Träger ist, und bestimmen Sie das Maximum von g_r!

Lösung: Da $g_r(x)$ außerhalb des Intervalls $[a, b]$ verschwindet, müssen wir nur zeigen, daß $g_r(x)$ eine stetige Funktion ist. Im Intervall (a, b) ist g_r stetig, da zusammengesetzt aus der Exponentialfunktion und Grundrechenarten, und die Limites $\lim\limits_{x \swarrow a} g_r(x)$ und $\lim\limits_{x \nearrow b} g_r(x)$ verschwinden beide, da das Argument der Exponentialfunktion in beiden Fällen gegen $-\infty$ geht. Also ist g_r stetig auf ganz $\mathbb{R}$ mit Träger $[a, b]$ falls $b > a$ und $\emptyset$ sonst.

$$(x-a)(b-x) = -x^2 + (a+b)x - ab = -\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + ab - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

wächst im offenen Intervall von a bis $\frac{1}{2}(a+b)$ monoton, um dann bis b monoton zu fallen; beim Kehrwert ist es umgekehrt, für den negativen Kehrwert und die Funktion g_r wieder genauso. Somit nimmt g_r sein Maximum im Punkt $\frac{1}{2}(a+b)$ an; der Funktionswert dort ist, dank des Vorfaktors, gleich eins.

n) Zeigen Sie, daß für die Folge der Funktionen $f_k = g_{1/k}$ und $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in (a,\, b) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ gilt:

$$\lim_{k \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_k(x)|\; dx = 0\,!$$

Hinweis: Betrachten Sie für ein hinreichend kleines $\delta > 0$ die drei Intervalle $[a,\, a+\delta]$, $[a+\delta, b-\delta]$ und $[b-\delta, b]$ getrennt!

Lösung: Wir wählen eine positive Zahl $\delta < \frac{1}{2}(b-a)$ und betrachten zunächst nur das Intervall $[a{+}\delta,\; b{-}\delta]$. Dort ist die Differenz zwischen $f(x)$ und $f_r(x)$ im Intervallmittelpunkt $(a+b)/2$ gleich null und wächst dann zu den Intervallenden hin monoton, da f_r selbst dort monoton fällt. Tatsächlich sieht man leicht, daß f_r monoton wachsend sowohl in $x-a$ als auch in $b-x$ ist; da beide Ausdrücke im Intervall $[a+\delta, b-\delta]$ durch δ nach unten beschränkt sind, ist $f_r(x)$ in diesem Intervall daher überall mindestens gleich

$$e^{\dfrac{4r}{(b-a)^2}}\, e^{\dfrac{-r}{\delta(1-\delta)}} = e^{-r\left(\dfrac{1}{\delta(1-\delta)} - \dfrac{4}{(b-a)^2}\right)}.$$

Für alle $x \in [a+\delta, b-\delta]$ ist daher

$$f(x) - f_r(x) \le 1 - e^{-r\left(\dfrac{1}{\delta(1-\delta)} - \dfrac{4}{(b-a)^2}\right)}.$$

Dieser Ausdruck ist noch nicht sehr angenehm; wir wollen ihn weiter abschätzen. Nach Konstruktion von f_r ist der Exponent negativ, und für alle $x \ge 0$ ist $1 - e^{-x} \le x$, denn dies gilt für $x = 0$, und die Ableitung e^{-x} von $1 - e^{-x}$ ist für jedes positive x kleiner als die Ableitung eins von x. Daher ist für $t \in [a+\delta, b-\delta]$

$$f(x) - f_r(x) \le 1 - e^{-r\left(\dfrac{1}{\delta(1-\delta)} - \dfrac{4}{(b-a)^2}\right)} \le r\left(\frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2}\right).$$

Das Intervall hat die Länge $(b-\delta) - (a+\delta) = a + b - 2\delta$; somit ist für kleine δ

$$\int\limits_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - f_r(x)|\; dx \le r(b-a-2\delta)\left(\frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2}\right) \le r(b-a)\left(\frac{2}{\delta} - \frac{4}{(b-a)^2}\right).$$

In den Intervallen $[a,\, a+\delta]$ und $[b-\delta,\, \delta]$ schätzen wir die Differenz einfach durch eins ab; die entsprechenden Intergrale sind also höchstens gleich δ, d.h.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_r(x)|\; dt \le \delta + r(b-a)\left(\frac{2}{\delta} - \frac{4}{(b-a)^2}\right) + \delta\,,$$

Wir spezialisieren auf $\delta = \sqrt{r}$; dann wird dies zu

$$\sqrt{r}\left(2 + (b-a)\left(2 - \frac{4\sqrt{r}}{(b-a)^2}\right)\right),$$

was für $r \to 0$ gegen Null geht.